اشتقاق الدوال العددي

I ـ اشتقاق دالة عددية في نقطة :

نشاط تمهيدي :

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=x^3$. احسب : $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

لدينا : $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$.

إذن : يوجد عدد حقيقي l حيث : $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=l$.

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في $a=1$ والعدد $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=12$ يسمى العدد المشتق للدالة f في $a=1$ ؛

ويرمز له بالرمز $f'(a)$.

1) تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a\in I$. نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وجد عدد حقيقي l حيث : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$. العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في a ونرمز له بالرمز $f'(a)$ أو $\frac{df}{dx}(a)$.

ونكتـــــب : $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

ملاحظات :

1. في التعريف السابق يمكن أن نضع : $x-a=h$ فيصبح التعريف :
f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وجد عدد حقيقي l حيث : $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$.

2. إذا وضعنا : $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)$ فإن : $f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\varphi(x)$
مع : $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0$.

وبوضع : $x=a+h$ فإن : $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h\varepsilon(h)$ مع $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$

تطبيقات :

1. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=x^3-x^2$.
بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق في $a=1$.
2. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=\sqrt{|x|}$. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $a=0$.
3. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=\sin x$. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $a=\pi$.

2) تقريب دالة قابلة للاشتقاق بدالة تآلفية :

تعريف :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في a . الدالة : $x\mapsto f(a)+(x-a)f'(a)$ (أو الدالة : $h\mapsto f(a)+hf'(a)$) تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة a . وتسمى أيضا تقريب للدالة f بجوار a.

العدد : $f(a)+hf'(a)$ هو التقريب التآلفي للعدد $f(a+h)$ بجوار a ونكتب : $f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$.

تطبيقات :

1) نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=x^3$.
أ ـ حدد تقريبا تآلفيا للدالة f بجوار $a=1$.
ب ـ استنتج قيمة مقربة للعدد $(1.00003)^3$.

2) نعتبر الدالة g المعرفة على IR بما يلي : $g(x)=\sqrt{1+x}$.

أ ــ حدد تقريبا تآلفيا للدالة g بجوار $a=0$.

ب ــ استنتج قيمة مقربة للعدد $\sqrt{1{,}0008}$.

3) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $h(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

أ ــ حدد تقريبا تآلفيا للدالة g بجوار $a=1$.

ب ــ استنتج قيمة مقربة للعدد $\dfrac{1}{1{,}006}$.

3) التأويل الهندسي :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

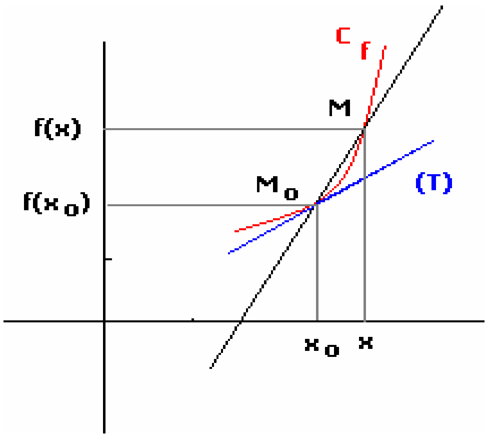
وليكن (T) المستقيم الممثل للدالة التآلفية المماسة للدالة f في x_0 .

نعتبر M_0 و M نقطتين من (C_f) أفصولهما على التوالي x_0 و x_0+h .

المعامل الموجه للمستقيم (MM_0) هو : $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

النقطة M تقترب من M_0 كلما اقترب h من 0 .

وبما أن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المعامل الموجه يؤول إلى $f'(x_0)$ الذي هو المعامل الموجه للمستقيم (T) .



تعريف :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 و (C_f) منحناها في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ متعامد ممنظم . المستقيم الممثل للدالة التآلفية المماسة للدالة f في x_0 يسمى مماس المنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0;f(x_0))$.

خاصية :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f .

معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0;f(x_0))$ هي : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

تمرين تطبيقي :

1. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=\sin x$ ؛ أعط معادلة المماس لمنحنى الدالة f في $x_0=\pi$.
2. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=x^2+2x$.

بين أن f قابلة للاشتقاق في $x_0=1$ وأعط معادلة المماس لمنحنى الدالة f في $x_0=1$.

4) الاشتقاق على اليمين ـ الاشتقاق على اليسار :

تعريف 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a;a+\alpha[$ حيث $\alpha\succ 0$. نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في a إذا كان يوجد عدد حقيقي l حيث : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$. العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في a ونرمز له بالرمز $f_d'(a)$ ونكتب : $f_d'(a)=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\succ a}}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ أو $f_d'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

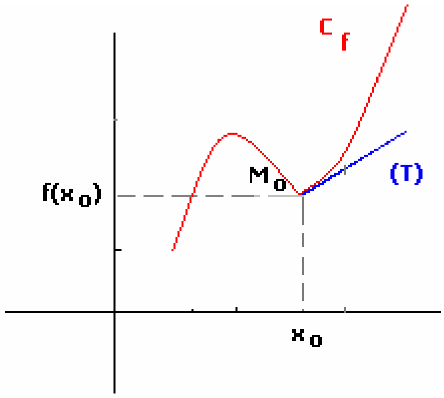
تعريف 2 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]a-\alpha;a]$ حيث $\alpha \succ 0$. نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في a إذا كان يوجد عدد حقيقي l حيث : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$. العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار في a ونرمز له بالرمز $f_g'(a)$ ونكتب : ونكتب : $f_g'(a) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\succ a}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ أو $f_g'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

التأويل الهندسي :

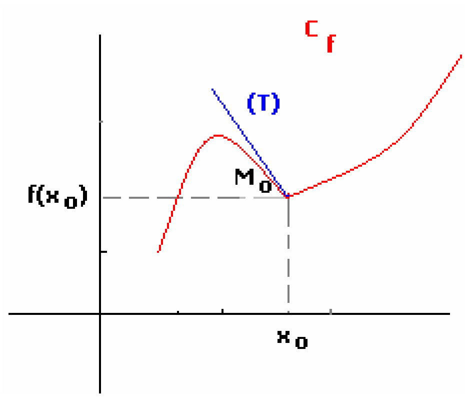
لتكن دالة عددية منحناها (C_f) في معلم متعامد و $A(a; f(a))$ نقطة من (C_f) .

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في a فإن المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس على اليمين في a معامله الموجه هو $f_d'(a)$.
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليسار في a فإن المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس على اليسار في a معامله الموجه هو $f_g'(a)$



معادلة نصف المماس (T) هي :

$$\begin{cases} y = f_d'(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

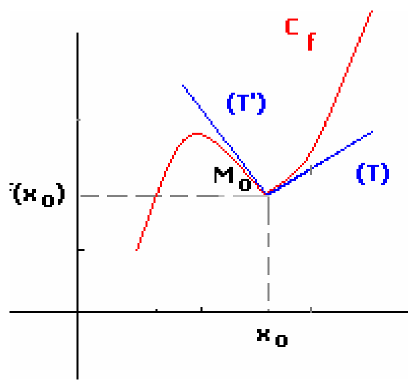


معادلة نصف المماس (T) هي :

$$\begin{cases} y = f_g'(a)(x-a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$. نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في a و قابلة للاشتقاق على اليسار في a و $f_g'(a) = f_d'(a)$.



في الشكل جانبه الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 و قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 لكن $f_g'(x_0) \neq f_d'(x_0)$

إذن : f غير قابلة للاشتقاق في x_0 .

معدلتي نصفي المماسين هما :

معادلة نصف المماس (T) هي : $\begin{cases} y = f_d'(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$

معادلة نصف المماس (T') هي : $\begin{cases} y = f_g'(a)(x-a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$

تطبيقات :

1) نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = |x^2 - 1|$

ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في و على اليسار في النقطة 1 ثم في النقطة -1 .

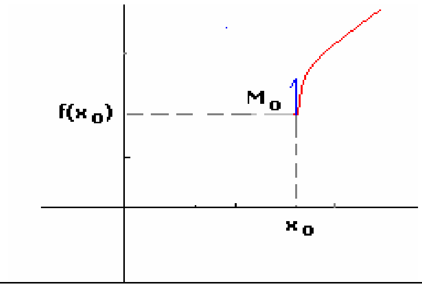
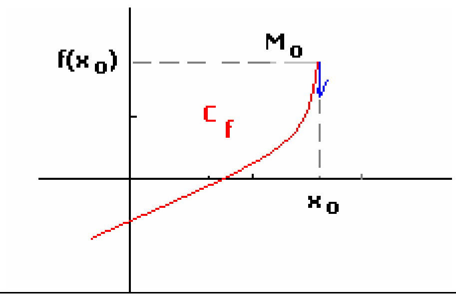
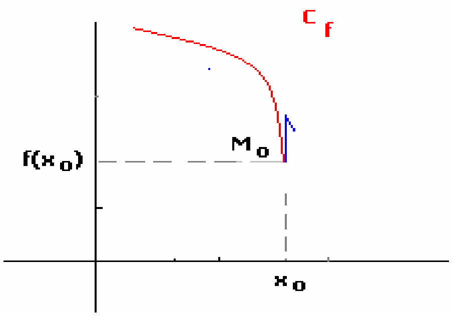
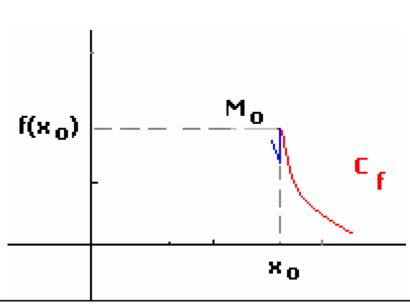
2) نعتبر الدالة نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt{x}$

ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 .

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .

<u>التأويل الهندسي :</u> منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى على اليمين في 0 .

<u>بصفة عامة لدينا :</u>

➢ إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ فإن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى على اليمين في a .	
➢ إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ فإن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل على اليمين في a .	
➢ إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ فإن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى على اليسار في a .	
➢ إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ فإن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل على اليسار في a .	

<u>II – الاشتقاق على مجال - الدالة المشتقة :</u>

<u>1) تعاريف :</u>

➢ نقول إن f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .

- نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المغلق $[a;b]$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من المجال المفتوح $]a;b[$ وقابلة للاشتقاق على اليمين في a و قابلة للاشتقاق على اليسار في b .
- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . الدالة المعرفة على I بما يلي : $x \mapsto f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f ويرمز لها بالرمز f' .
- لتكن f قابلة للاشتقاق على مفتوح I . إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f ويرمز لها بالرمز f'' .

ملاحظة :
بنفس الطريقة نعرف الدالة المشتقة الثالثة للدالة f (الدالة المشتقة من الرتبة 3) والتي يرمز لها بالرمز : f''' أو $f^{(3)}$
كما نعرف بنفس الطريقة الدالة المشتقة من الرتبة 4 و .... والدالة المشتقة من الرتبة n والتي يرمز لها على التوالي بالرمز $f^{(4)}$ و .... و $f^{(n)}$.

تمرين تطبيقي :
نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = 2x^3$.
1) بين أن f قابلة للاشتقاق على IR .
2) بين أن f قابلة للاشتقاق مرتين على IR .

الجواب :
1) بين أن f قابلة للاشتقاق على IR :
ليكن a عنصرا من IR .
لدينا : $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(a+h)^3-2a^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2a^3+6a^2h+6ah^2+2h^3-2a^3}{h}$.
$= \lim_{h\to 0}\left(6a^2+6ah+2h^2\right) = 6a^2$
إذن : f قابلة للاشتقاق في a ولدينا $f'(a) = 6a^2$. وهذا صحيح لكل a من IR .
إذن : f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا : $\forall x \in IR \ : \ f'(x) = 6x^2$.
2) نبين أن f قابلة للاشتقاق مرتين على IR :
من أجل ذلك نبين أن f' قابلة للاشتقاق على IR .
ليكن a عنصرا من IR .
لدينا : $\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6(a+h)^2-6a^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6a^2+12ah+6h^2-6a^2}{h} = \lim_{h\to 0}(12a+6h) = 12a$.
إذن : f' قابلة للاشتقاق في a .
وبالتالي فإن : f قابلة للاشتقاق مرتين في a ولدينا : $f''(a) = 12a$. وهذا صحيح لكل a من IR .
إذن : f قابلة للاشتقاق مرتين على IR ولدينا : $\forall x \in IR \ : \ f''(x) = 12x$.

III ـ العمليات على الدوال المشتقة ـ الدالة المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية :

1) الدالة المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية :

الدالة f	الدالة المشتقة	مجموعة التعريف		الدالة f	الدالة المشتقة	مجموعة التعريف
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	IR		$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	IR^*
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	IR		$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 \ ; \ +\infty[$ غير قابلة للاشتقاق في 0
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	IR		$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	IR
$f(x) = x^n$ $(n \in IN^* - \{1\})$	$f'(x) = nx^{n-1}$ $(n \in IN^* - \{1\})$	IR		$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	IR

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$f'(x) = \frac{1}{[\cos(x)]^2} = 1 + [\tan(x)]^2$	$f(x) = \tan x$		IR^*	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$

2) العمليات على الدوال المشتقة :

خاصيات :

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I .

1) الدالة $f+g$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x \in I \; : \; (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

2) الدالة αf حيث $\alpha \in IR$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x \in I \; : \; (\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$.

3) الدالة $f.g$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x \in I \; : \; (f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

4) إذا كان $\forall x \in I \; : f(x) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{1}{f}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x \in I \; : \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

5) إذا كان $\forall x \in I \; : g(x) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا :

$$\forall x \in I \; : \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \; .$$

6) الدالة f^n (حيث $n \in IN^*$) قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x \in I \; : \; (f^n)'(x) = nf^{n-1}(x) f'(x)$.

7) إذا كان $\forall x \in I \; : f(x) \neq 0$ فإن الدالة f^n (حيث $n \in Z^*$) قابلة للاشتقاق على I ولدينا :

$\forall x \in I \; : \; (f^n)'(x) = nf^{n-1}(x) f'(x)$.

نتيجة :

- كل حالة حدودية قالية للاشتقاق على IR .
- كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها .

تطبيقات :

احسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$

2) $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 2x)$

3) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

4) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - x}$

5) $f(x) = (x^2 - 2x)^3$

6) $f(x) = \sin x(1 + \cos^2 x)$

7) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x}$

8) $f(x) = \frac{1}{\tan x \sin x}$

3) الدالة المشتقة للدالتين $f(ax+b)$ و $\sqrt{f}$:

خاصية 1 :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و a و b عددين حقيقيين . ونعتبر J مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث : $(ax+b) \in I$. الدالة : $g : x \mapsto f(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على J ولدينا : $\forall x \in J \; : \; g'(x) = af'(ax+b)$

أمثلة :

- (sin(3.x+1))' = 3. cos(3.x + 1)
- (cos(3.x+1))' = -3. sin(3.x + 1)
- $(\tan(3x+1))' = \frac{3}{(\cos(3x+1))^2}$

خاصية 2 :

لتكن f دالة موجبة قطعا وقابلة للاشتقاق على مجال I .

الدالة $\sqrt{f}$ المعرفة بما يلي : $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x \in I : \left(\sqrt{f}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

مثال :

لنحدد الدالة المشتقة للدالة f المعرفة ب : $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$

لدينا : الدالة $x\mapsto x^2+2x+3$ دالة حدودية إذن فهي قابلة للاشتقاق على IR .

ولدينا : $x^2+2x+3\succ 0$ لكل x من IR (لأن مميز x^2+2x+3 سالب و $a=1\succ 0$)

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا لكل x من IR :

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+2x+3\right)'}{2\sqrt{x^2+2x+3}}=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} \ .$$

IV ـ تطبيقات الاشتقاق :

1) رتابة دالة وإشارته دالتها المشتقة :

نشاط تمهيدي :

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=x^2$

ـ حدد تغيرات الدالة f على IR .

ـ احسب $f'(x)$ واستنتج إشارتها على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$. ما ذا تستنتج ؟

الجواب :

ـ لدينا : f تزايدية على المجال $[0;+\infty[$ وتناقصية على المجال $]-\infty;0]$.

ـ ولدينا : $f'(x)=2x$ إذن : $\forall x\in[0;+\infty[\ : \ f'(x)\geq 0$ و $\forall x\in]-\infty;0] \ : \ f'(x)\leq 0$

خاصية :

لتكن f دالة

اليمني محمد www.sbaysite.com