I ـ نهاية لا منتهية لدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

1) نشاط تمهيدي :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2$

أ ـ أتمم الجدول التالي :

x	10^8	2×10^{50}	5×10^{120}	4×10^{300}	3×10^{600}	6×10^{1000}
$f(x)$						

نلاحظ أنه من خلال الجدول أنه عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر فإن $f(x)$ قيما أكبر فأكبر ؛ أي حينما تؤول x إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$.

نقول إن نهاية $f(x)$ حينما تؤول x إلى $+\infty$ هي $+\infty$.

ونكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب ـ أتمم الجدول التالي :

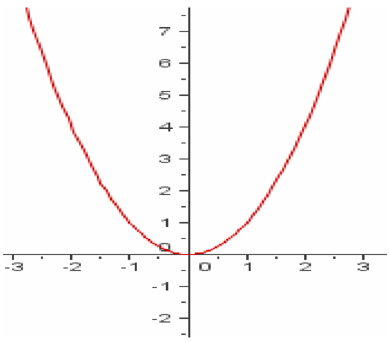
x	-10^8	-2×10^{50}	-5×10^{120}	-4×10^{300}	-3×10^{600}	-6×10^{1000}
$f(x)$						

نلاحظ أنه من خلال الجدول أنه حينما تؤول x إلى $-\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$.

نقول إن نهاية $f(x)$ حينما تؤول x إلى $-\infty$ هي $+\infty$.

ونكتب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

ج ـ أنشئ التمثيل المبياني للدالة f واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.



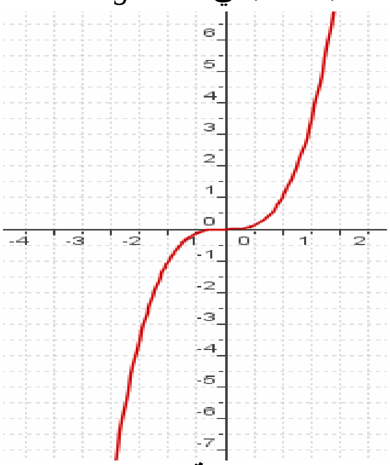
من خلال التمثيل المبياني للدالة f أيضا نلاحظ أن : حينما تؤول x إلى $-\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ و حينما تؤول x إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$.

إذن من خلال التمثيل المبياني للدالة f نستنتج أن :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ وأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2 ـ أنشئ التمثيل المبياني للدالة g المعرفة بما يلي واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

التمثيل المبياني للدالة g :



من التمثيل المبياني للدالة g نستنتج أن :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

2) نهايات هامة :

نقبل النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$.

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ إذا كان n عدد زوجي

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ إذا كان n عدد فردي .

II ـ نهاية منتهية لدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

1) نشاط تمهيدي :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{x}$

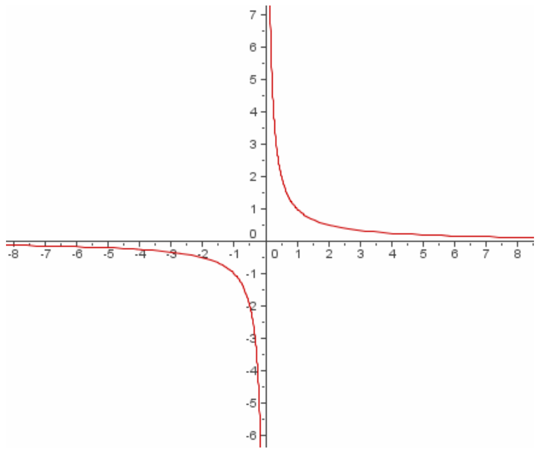
أ ـ أتمم الجدول التالي :

x	10^8	2×10^{50}	5×10^{120}	4×10^{300}	3×10^{600}	6×10^{1000}
$f(x)$						

نلاحظ أنه من خلال الجدول أنه عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر فإن $f(x)$ تقترب من الصفر؛ أي حينما تؤول x إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى 0 .

نقول إن نهاية $f(x)$ حينما تؤول x إلى $+\infty$ هي 0 ونكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

ب ـ أنشئ التمثيل المبياني للدالة f واستنتج : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.



من خلال التمثيل المبياني للدالة f أيضا نلاحظ أن : حينما تؤول x إلى $-\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى 0 و حينما تؤول x إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تؤول أيضا إلى 0 .

إذن من خلال التمثيل المبياني للدالة f نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ وأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

2) ترميز واصطلاحات :

النهاية المنتهية عند $+\infty$:

لتكن f دالة يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع : $]a;+\infty[$.

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى l حينما تؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{+\infty} f(x)=l$.

النهاية المنتهية عند $-\infty$:

لتكن f دالة يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع : $]-\infty;a[$.

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى l حينما تؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{-\infty} f(x)=l$.

3) نهايات هامة :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$.

4) خاصيات :

1. إذا كانت لدالة عددية نهاية l في $+\infty$ فإن هذه النهاية وحيدة .
2. إذا كانت لدالة عددية نهاية l في $-\infty$ فإن هذه النهاية وحيدة .

3. $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-l\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=l$.

4. $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-l\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=l$.

تمرين تطبيقي :

بين أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+1}{x^2}=-3$.

III – نهاية منتهية ونهاية لا منتهية لدالة f في نقطة :

1) نهاية منتهية لدالة f في نقطة :

لتكن f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع : $]a-\alpha;a+\alpha[$ أو مجموعة من نوع :
$]a-\alpha;a+\alpha[-\{a\}$ ؛ ($\alpha \succ 0$) ؛ وليكن l عددا حقيقيا .

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l حينما تؤول x إلى a فإننا نكتب : $\lim_{x\to a} f(x)=l$ أو $\lim_{a} f(x)=l$.

خاصية :

إذا كانت لدالة عددية f نهاية l في a فإن هذه النهاية وحيدة .

نهاية هامة :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم لدينا : $\lim_{x\to 0} x^n=0$.

2) نهاية لا منتهية لدالة f في نقطة :

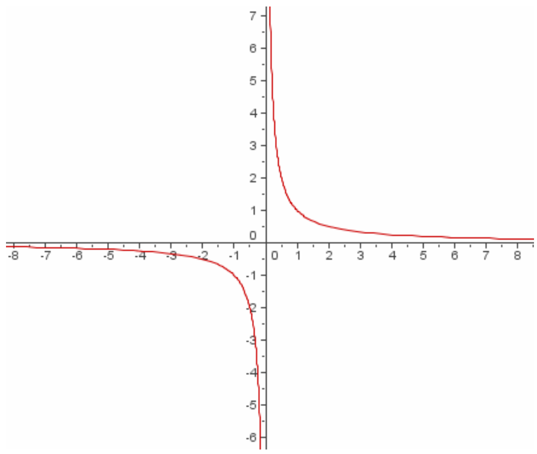
لتكن f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع : $]a-\alpha;a+\alpha[$ أو مجموعة من نوع :
$]a-\alpha;a+\alpha[-\{a\}$ ؛ ($\alpha \succ 0$)

- إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ حينما تؤول x إلى a فإننا نكتب : $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{a} f(x)=+\infty$.
- إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ حينما تؤول x إلى a فإننا نكتب : $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ أو $\lim_{a} f(x)=-\infty$.

IV – النهاية على اليمين - النهاية على اليسار :

1) نشاط تمهيدي :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{1}{x}$.



من خلال التمثيل المبياني للدالة f نلاحظ أن : حينما تؤول x إلى 0 على اليمين فإن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$. نقول إن نهاية f حينما تؤول x إلى 0 على اليمين هي $+\infty$
ونكتب : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

كما نلاحظ أن : حينما تؤول x إلى0 على اليسار فإن $f(x)$ تؤول $-\infty$. نقول إن نهاية f حينما تؤول x إلى 0 على اليسار هي $-\infty$.
ونكتب : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} f(x)=-\infty$ أو $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

2) ترميز واصطلاحات :

ليكن l و a عددين حقيقيين .

- إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l حينما تؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب : $\lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=l$ أو $\lim_{x\to a^+} f(x)=l$.
- إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l حينما تؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب : $\lim_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=l$ أو $\lim_{x\to a^-} f(x)=l$.

- إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ حينما تؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$.
- إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ حينما تؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$.
- إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ حينما تؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$.
- إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ حينما تؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$.

3) نهايات هامة :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم لدينا :

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$ إذا كان n عددا زوجيا .
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^n}=-\infty$ إذا كان n عددا فرديا .

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ ؛ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

4) خاصيات :

1. تكون $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ إذا وفقط إذا كان : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=l$.
2. تكون $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ إذا وفقط إذا كان : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=+\infty$.
3. تكون $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ إذا وفقط إذا كان : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=-\infty$.

تمارين تطبيقية :

1) نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} & ; \quad x\succ 0\\ f(x)=x^3 & ; \quad x\leq 0\end{cases}$

احسب : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2) نعتبر الدالة g المعرفة على IR^* بما يلي : $g(x)=\dfrac{x^2+x}{|x|}$.

أ ــ أكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة .

ب ــ احسب : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$.

ج ــ هل الدالة g تقبل نهاية في 0 .

V ــ العمليات على النهايات :

الجدول التالي يلخص العمليات على النهايات ونتائجه صالحة سواء كانت x تؤول إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ أو إلى a أو إلى a على اليمين أو إلى a على اليسار.

نهاية f	نهاية g	نهاية $f+g$	نهاية λf $(\lambda \neq 0)$	نهاية $f \times g$	نهاية $\frac{1}{g}$	نهاية $\frac{f}{g}$
l	$l'\ (l' \neq 0)$	$l+l'$	λl	$l \times l'$	$\frac{1}{l'}$	$\frac{l}{l'}$
$l\ (l \neq 0)$	$+\infty$	$+\infty$	λl	$+\infty\ l \succ 0\ ;$ $-\infty\ l \prec 0\ ;$	0	0
$l\ (l \neq 0)$	$-\infty$	$-\infty$	λl	$-\infty\ l \succ 0\ ;$ $+\infty\ l \prec 0\ ;$	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty\ ;\ \lambda \succ 0$ $-\infty\ ;\ \lambda \prec 0$	$+\infty$	0	شكل غير محدد
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty\ ;\ \lambda \succ 0$ $+\infty\ ;\ \lambda \prec 0$	$+\infty$	0	شكل غير محدد
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	$+\infty\ ;\ \lambda \succ 0$ $-\infty\ ;\ \lambda \prec 0$	$-\infty$	0	شكل غير محدد
0	$+\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد	0	0
0	$-\infty$	$-\infty$	0	شكل غير محدد	0	0
$l\ (l \neq 0)$	0^+	l	λl	0	$+\infty$	$+\infty\ ;\ l \succ 0$ $-\infty\ ;\ l \prec 0$
$l\ (l \neq 0)$	0^-	l	λl	0	$-\infty$	$-\infty\ ;\ l \succ 0$ $+\infty\ ;\ l \prec 0$

ملاحظة :

الأشكال غير المحددة هي : $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $0 \times \infty$ و $(-\infty)-(-\infty)$ و $(+\infty)-(+\infty)$ و $(-\infty)+(+\infty)$ وهي تعني أنه لا يمكن حساب النهاية باستعمال هذه العملية وينبغي استعمال طريقة أخرى لحساب النهاية .

تمارين تطبيقية :

احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}}$ ؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x}}$ ؛ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3-x^2+x)$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3-x^2+x)$.

VI ـ نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية والدوال اللاجذرية والدوال المثلثية :

1) نهايات الدوال الحدودية :

نقبل الخاصية التالية :

خاصية :

نعتبر الحدودية : $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ حيث $a_n \neq 0$.

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n$ و $\lim\limits_{x \to a} P(x) = \lim\limits_{x \to a} P(a)$

بتعبير آخر :

نهاية دالة حدودية حينما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية الحد الذي له أعلى درجة ؛ ونهاية دالة حدودية في a حيث a عدد حقيقي هي $P(a)$

أمثلة :

2) نهايات دوال جذرية :

3) نهايات دوال لا جذرية :

اليمني محمد **www.sbaysite.com**

4) نهايات دوال مثلثية :

نقبل النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ؛ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$ ؛ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

VII ـ الترتيب والنهايات :

نقبل الخاصيات التالية :

خاصيات :

لتكن f و g و h ثلاث دوال معرفة على مجال من نوع $I=[a;+\infty[$.

1) إذا كان : $g(x)\le f(x)$ لكل x من I و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2) إذا كان : $f(x)\le g(x)$ لكل x من I و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

3) إذا كان : $h(x)\le f(x)\le g(x)$ لكل x من I و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.

4) إذا كان : $|f(x)-l|\le g(x)$ لكل x من I و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.

ملاحظة :

هذه الخاصيات تبقى صالحة إذا كانت x تؤول إلى $-\infty$ أو إلى a أو إلى a على اليمين أو إلى a على اليسار.

تطبيقات :

1) احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

2) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+\sin x}{x^2+1}=2$

لدينا : $\left|\dfrac{2x^2+\sin x}{x^2+1}-2\right|=\left|\dfrac{\sin x-2}{x^2+1}\right|=\dfrac{|\sin x-2|}{x^2+1}$ ؛ كما لدينا : $|\sin x-2|\le|\sin x|+2$

وبما أن $|\sin x|\le 1$ لكل x من IR فإن : $|\sin x-2|\le|\sin x|+2\le 3$

إذن : $\left|\dfrac{2x^2+\sin x}{x^2+1}-2\right|=\dfrac{|\sin x-2|}{x^2+1}\le\dfrac{3}{x^2+1}$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2+1}=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+\sin x}{x^2+1}=2$.

3) نعتبر الدالة f المعرفة على IR^* بما يلي : $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}$.

أ ـ حدد : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

ب ـ بين أن $|f(x)|\le\dfrac{1}{x^2}$: $\forall x\in IR^*$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

لدينا : $\forall x\in IR^*:\quad f(x)-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\sqrt{2-\cos x}-2}{x^2}=\dfrac{-\cos x-2}{x^2\left(\sqrt{2-\cos x}+2\right)}\le 0$

إذن : $\forall x\in IR^*:\quad f(x)\le\dfrac{1}{x^2}\quad(1)$

ولدينا : $\forall x\in IR^*:\quad f(x)+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\sqrt{2-\cos x}}{x^2}\ge 0$

إذن : $\forall x\in IR^*:\quad -\dfrac{1}{x^2}\le f(x)\quad(2)$

من (1) و (2) نستنتج أن $\forall x\in IR^*:\quad -\dfrac{1}{x^2}\le f(x)\le\dfrac{1}{x^2}$

إذن : $\forall x \in IR^* : \ |f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$

وبما أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

نهاية الدرس