

عموميات حول الدوال العددية

I - الدالة المكبورة - الدالة المصغورة - الدالة المحدودة :

(1) نشاط تمهيدى :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$

- | | |
|--|---|
| <p>1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.</p> <p>2. بين أن $f(x) < 2$ لكل x من D_f.</p> | <p>3. بين أن $f(x) \geq 1$ لكل x من D_f.</p> <p>4. استنتج أن $1 \leq f(x) < 2$ لكل x من D_f.</p> |
|--|---|

الحل :

1. لدينا : لكل x من IR : $x^2+1 > 0$ وبالتالي فإن : $D_f = IR$

2. نبين أن $f(x) < 2$ لكل x من IR :

$$\forall x \in IR : f(x) - 2 = \frac{2x^2+1}{x^2+1} - 2 = \frac{2x^2+1-2x^2-2}{x^2+1} = \frac{-1}{x^2+1} < 0$$

إذن : $f(x) < 2$ لكل x من IR . نقول إن الدالة f مكبورة بالعدد 2 على IR .
3. نبين أن $f(x) \geq 1$ لكل x من IR :

$$\forall x \in IR : f(x) - 1 = \frac{2x^2+1}{x^2+1} - 1 = \frac{2x^2+1-x^2-1}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} \geq 0$$

إذن : $f(x) \geq 1$ لكل x من IR . نقول إن الدالة f مصغورة بالعدد 1 على IR .
4. استنتج أن $1 \leq f(x) < 2$ لكل x من IR :

5. لدينا : $f(x) \geq 1$ و $f(x) < 2$ لكل x من IR . إذن : $1 \leq f(x) < 2$ لكل x من IR .
نقول إن الدالة f محدودة على IR . (مكبورة ومصغورة على IR)

(2) تعريف :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f .

1. نقول إن f مكبورة على D_f إذا يوجد عدد حقيقي M بحيث : $f(x) \leq M$: $\forall x \in D_f$ (أو $(\forall x \in D_f f(x) < M)$.

2. نقول إن f مصغورة على D_f إذا يوجد عدد حقيقي m بحيث : $f(x) \geq m$: $\forall x \in D_f$ (أو $(\forall x \in D_f f(x) > m)$.

3. نقول إن f محدودة على D_f إذا مكبورة ومصغورة على D_f ؛ أي يوجد عددين حقيقيين m و M بحيث : $m \leq f(x) \leq M$: $\forall x \in D_f$.

تمرين 1 :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

- | | |
|--|---|
| <p>1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.</p> <p>2. بين أن الدالة f مكبورة بالعدد $\frac{7}{3}$ على D_f.</p> | <p>3. بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 1 على D_f.</p> <p>4. استنتج أن الدالة f محدودة على D_f.</p> |
|--|---|

الحل :

1. تكون f معرفة إذا كان $x^2+3x+3 \neq 0$

نعتبر المعادلة $x^2+3x+3=0$: مميز هذه المعادلة هو $\Delta = 9-4 \times 3 = -3 < 0$

إذن $x^2+3x+3 > 0$ لكل $x \in IR$ وبالتالي فإن $x^2+3x+3 \neq 0$ لكل $x \in IR$ ؛ إذن : $D_f = IR$

2. نبين أن الدالة f مكبورة بالعدد $\frac{7}{3}$ على IR :

$$f(x) - \frac{7}{3} = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3} - \frac{7}{3} = \frac{6x^2 + 21x + 21 - 7x^2 - 21x - 21}{3(x^2 + 3x + 3)} = \frac{-x^2}{3(x^2 + 3x + 3)}$$

لدينا : $f(x) - \frac{7}{3} = \frac{-x^2}{3(x^2 + 3x + 3)}$ بما أن : $x^2 + 3x + 3 > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ و $-x^2 \leq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ فإن : $f(x) - \frac{7}{3} \leq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$

إذن : $f(x) \leq \frac{7}{3}$ لكل $x \in \mathbb{R}$. وبالتالي فإن الدالة f مكبورة بالعدد $\frac{7}{3}$ على \mathbb{R} .

3. نسن أن الدالة f مصغرة بالعدد 1 على \mathbb{R} :

$$f(x) - 1 = \frac{2x^2 + 7x + 7 - x^2 - 3x - 3}{x^2 + 3x + 3} = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 3} = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 3x + 3}$$

لدينا : $f(x) - 1 = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 3x + 3}$ بما أن : $x^2 + 3x + 3 > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ و $(x+2)^2 \geq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ فإن : $f(x) - 1 \geq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ إذن : $f(x) \geq 1$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

وبالتالي فإن الدالة f مصغرة بالعدد 1 على \mathbb{R} .

4. استنتاج أن الدالة f محدودة على \mathbb{R} :

لدينا : $f(x) \geq 1$ و $f(x) \leq \frac{7}{3}$ لكل $x \in \mathbb{R}$. إذن : $1 \leq f(x) \leq \frac{7}{3}$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

وبالتالي فإن الدالة f محدودة على \mathbb{R} . (مكبورة ومصغرة على \mathbb{R})

تمرين 2 :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. بين أن f مكبورة بالعدد 3 على D_f .
3. بين أن f مصغرة بالعدد 1 على D_f .
4. استنتج أن f محدودة على D_f .

(3) خاصيات :

خاصة 1 :

- إذا كانت f مكبورة بعدد حقيقي M فإن f مكبورة بكل عدد حقيقي N حيث $N \geq M$.
- إذا كانت f مصغرة بعدد حقيقي m فإن f مصغرة بكل عدد حقيقي n حيث $n \leq m$.

نشاط تمهيدى :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f .

1. بين أنه إذا كان يوجد عدد حقيقي $\alpha > 0$ بحيث : $|f(x)| \leq \alpha$ لكل x من D_f فإن f محدودة على D_f .
2. نفترض أن f محدودة على D_f : بين أنه يوجد عدد حقيقي $\alpha > 0$ بحيث : $|f(x)| \leq \alpha$ لكل x من D_f .

خاصة 2 :

تكون f محدودة على D_f إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $\alpha > 0$ بحيث : $|f(x)| \leq \alpha$ لكل x من D_f (أو : $|f(x)| < \alpha$ لكل x من D_f) .

تمرين 3 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^4 + 1}$

1. بين أن f دالة محدودة نعلى \mathbb{R} .
2. بين أن f مكبورة بالعدد 1 ومصغرة بالعدد α حيث α هو أصغر حلي المعادلة $4t^2 - 4t - 1 = 0$.

تمرين 4 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = x^4 - 4x + 1$.

1. بين أن f تناقصية على المجال $[0;1]$.
 2. استنتج أن f مكبورة بالعدد 1 ومصغورة بالعدد -2 على المجال $[0;1]$.

تمرين 5 :

بين أن الدوال التالية محدودة على IR : $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$ ؛ $g(x) = \frac{x \sin x}{1+x^2}$ ؛ $h(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$.

II - الدالة الدورية :

(1) نشاط تمهيدى :

- نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = \cos x$.
 لدينا : لكل x من IR : $(x+2\pi) \in IR$ و $f(x+2\pi) = f(x)$.
 نقول إن الدالة f دورية دورها 2π .
 * هل الدالة g المعرفة على IR بما يلي : $g(x) = \sin x$ دورية ؟ ما هو دورها ؟
 * هل الدالة h المعرفة على IR بما يلي : $h(x) = \tan x$ دورية ؟ ما هو دورها ؟

(2) تعريف :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f .
 نقول إن f دالة دورية إذا كان يوجد عدد حقيقي T موجب قطعاً بحيث :
 1. لكل x من D_f لدينا : $x+T \in D_f$.
 2. لكل x من D_f لدينا : $f(x+T) = f(x)$.
 العدد T يسمى دور الدالة f .

خاصية :

إذا كان T دوراً للدالة f فإن لكل k من Z لدينا : $f(x+kT) = f(x)$ ؛ $\forall x \in D_f$.

ملاحظة :

إذا كانت f دالة عددية حيز تعريفها D_f و T دوراً لها فإنه :

- يكفي دراسة تغيرات الدالة على المجموعة $D_f \cap [0;T]$ أو $D_f \cap \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$.
- نستنتج جزء منحنى f على $(k \in Z)$: $D_f \cap \left[-\frac{T}{2} + (k+1)T; \frac{T}{2} + (k+1)T\right]$ من جزء منحنى f على $D_f \cap \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ بالإزاحة ذات المتجهة $(T\vec{i})$.

مثال :

التمثيل المبياني للدالة $x \mapsto \cos x$.
 ندرس تغيرات الدالة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ وننشئ منحنائها على $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ونستنتج منحنائها على كل مجال $\left[-\frac{\pi}{2} + k(2\pi); \frac{\pi}{2} + k(2\pi)\right]$ ؛ $(k \in Z)$ بالإزاحة ذات المتجهة $(2\pi)\vec{i}$.

تمرين 6 :

ليكن a عدد حقيقياً موجباً قطعاً .
 بين أن الدوال التالية دورية وحدد دور كل منها : $f(x) = \sin ax$ ؛ $g(x) = \cos ax$ ؛ $h(x) = \tan ax$.

III - مقارنة دالتين :

(1) الدالة الموجبة - الدالة السالبة :

تعريف :

f دالة عددية حيز تعريفها D_f .

- نقول إن f دالة موجبة على D_f إذا كان : $f(x) \geq 0$ لكل x من D_f . ونكتب : $f \geq 0$ على D_f .
- نقول إن f دالة سالبة على D_f إذا كان : $f(x) \leq 0$ لكل x من D_f . ونكتب : $f \leq 0$ على D_f .

أمثلة : - الدالة : $f : x \mapsto |x|$ موجبة على \mathbb{R} .

- الدالة : $g : x \mapsto 1 - x^2$ موجبة على $[-1, 1]$ وسالبة على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

- الدالة : $h : x \mapsto -x^2$ سالبة على \mathbb{R} .

مثل هذه الدوال في معلم متعامد ممنظم .

ملاحظة :

تكون f دالة موجبة على D_f إذا كانت مصغورة بالعدد 0 على D_f ؛ وتكون سالبة إذا كانت مكبورة بالعدد 0 .

التأويل المبياني :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f ، و (C_f) منحناها في معلم (O, \bar{i}, \bar{j}) .

- تكون f دالة موجبة على D_f إذا فقط إذا كان (C_f) يوجد فوق محور الأفاصيل .
- تكون f دالة سالبة على D_f إذا فقط إذا كان (C_f) يوجد تحت محور الأفاصيل .

تمرين تطبيقي :

ادرس إشارة الدالة f بحيث : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{-2x^2 + 3x - 3}$.

(2) مقارنة دالتين :

تعريف :

لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس المجموعة D .

نقول إن f أصغر من أو تساوي g على D إذا كان : $f(x) \leq g(x)$ لكل x من D ونكتب : $f \leq g$ على D .

نقول إن f أصغر قطعاً من g على D إذا كان : $f(x) < g(x)$ لكل x من D ونكتب : $f < g$ على D .

ملاحظات :

- تكون $f \leq g$ على D إذا فقط إذا كان : $f - g \leq 0$ على D .
- لا يمكن أن نقارن دالتين إلا إذا كان لهما نفس مجموعة التعريف .

التأويل المبياني :

خاصية :

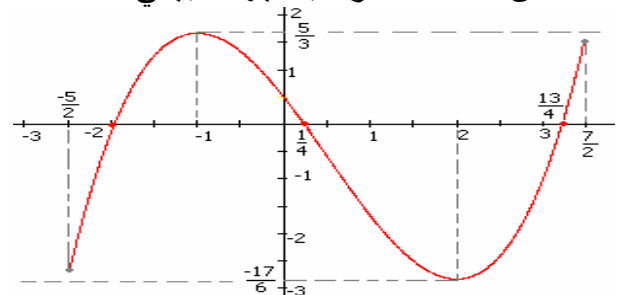
لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس المجموعة D . ولتكن (C_f) و (C_g) منحناهما في معلم (O, \bar{i}, \bar{j}) .

تكون $f \leq g$ على D إذا فقط إذا كان : (C_f) يوجد تحت (C_g) .

IV - مطاريف دالة :

نشاط تمهيدى :

1 - لتكن f الدالة المعرفة بتمثيلها المبياني :



* تحقق أن : $f(x) \geq f(2)$: $\forall x \in]0; 3[$.

نقول إن الدالة f تقبل قيمة دنوية في 2 هي

$$f(2) = -\frac{17}{6}$$

* تحقق أن : $f(x) \leq f(-1)$: $\forall x \in]-2; 0[$.

نقول إن الدالة f تقبل قيمة قصوية في -1 هي

$$f(-1) = \frac{5}{3}$$

1) تعاريف :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f ؛ وليكن a عنصرا من D_f .
1) نقول إن f تقبل قيمة دنوية في a إذا كان a ينتمي إلى مجال مفتوح I ($I \subset D_f$) بحيث :

$$\forall x \in I ; f(x) \geq f(a)$$

2) نقول إن f تقبل قيمة قصوية في a إذا كان a ينتمي إلى مجال مفتوح I ($I \subset D_f$) بحيث :

$$\forall x \in I ; f(x) \leq f(a)$$

3) القيم القصوية والقيم الدنوية تسمى مطاريف دالة .

2 - تعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[-3;2]$ وجدول تغيراتها هو :

الدالة g تقبل قيمة دنوية في 0 هي $g(0) = 2$

الدالة g تقبل قيمة قصوية في 1 هي $g(1) = 4$

V - رتبة دالة :

1) تعاريف :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f ، و I مجالا D_f .

- f تزايدية على I يعني أنه لكل عنصرين x و y من I لدينا : إذا كان $x < y$ فإن $f(x) \leq f(y)$.
- f تزايدية قطعا على I يعني أنه لكل عنصرين x و y من I لدينا : إذا كان $x < y$ فإن $f(x) < f(y)$.
- f تناقصية على I يعني أنه لكل عنصرين x و y من I لدينا : إذا كان $x < y$ فإن $f(x) \geq f(y)$.
- f تناقصية قطعا على I يعني أنه لكل عنصرين x و y من I لدينا : إذا كان $x < y$ فإن $f(x) > f(y)$.
- إذا كان $f(x) = f(y)$ لكل عنصرين x و y من I فإن الدالة f ثابتة على I ، أي : يوجد عنصر c من \mathbb{R} بحيث : $f(x) = c$ لكل x من I .
- f رتيبة على I يعني أن f تزايدية على I أو f تناقصية على I .
- f رتيبة قطعا على I يعني أن f تزايدية قطعا على I أو f تناقصية قطعا على I .

2. معدل تغير دالة :

تعريف :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f ، و x و y عنصرين مختلفين من D_f .

العدد الحقيقي : $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين x و y .

خاصيات :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f ، و I مجالا D_f .

- f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان : $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$ لكل x و y عنصرين مختلفين من I .
- f تزايدية قطعا على I إذا وفقط إذا كان : $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$ لكل x و y عنصرين مختلفين من I .
- f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان : $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 0$ لكل x و y عنصرين مختلفين من I .
- f تناقصية قطعا على I إذا وفقط إذا كان : $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0$ لكل x و y عنصرين مختلفين من I .

3. تغيرات دالة تآلفية :

خاصية : لتكن الدالة التآلفية f بحيث : $f(x) = ax + b$ لكل x من \mathbb{R} .

- إذا كان $a > 0$ فإن f تزايدية قطعا على \mathbb{R} .

• إذا كان $a < 0$ فإن f تناقصية قطعاً على \mathbb{R} .

• إذا كان $a = 0$ فإن f ثابتة على \mathbb{R} .

4. الرتبة وزوجية دالة:

خاصية:

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f متماثلاً بالنسبة للصفر، و I مجالاً ضمن D_f و J مماثل I بالنسبة للصفر.

• إذا كانت f دالة فردية فإن:

f تزايدية على I (تزايدية قطعاً على I) يكافئ: f تزايدية على J (تزايدية قطعاً على J).

f تناقصية على I (تناقصية قطعاً على I) يكافئ: f تناقصية على J (تناقصية قطعاً على J).

• إذا كانت f دالة زوجية فإن:

f تزايدية على I (تزايدية قطعاً على I) يكافئ: f تناقصية على J (تناقصية قطعاً على J).

f تناقصية على I (تناقصية قطعاً على I) يكافئ: f تزايدية على J (تزايدية قطعاً على J).

تمرين 6:

I - لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

(1) بين أن الدالة f فردية.

(2) ادرس رتبة الدالة f على كل من المجالين $[0;1]$ و $[1;+\infty[$.

(3) استنتج تغيرات f على \mathbb{R} .

II - لتكن g الدالة العددية المعرفة بما يلي: $g(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$.

(1) بين أن الدالة g زوجية.

(2) ادرس رتبة الدالة g على كل من المجالين $[0;1]$ و $[1;+\infty[$.

(3) استنتج تغيرات g على \mathbb{R} .

VI مركب الدالتين:

(1) نشاط تمهيدى:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بما يلي: $g(x) = \sqrt{x}$ و $f(x) = -x + 2$.

1 - احسب: $f(1)$ و $f(6)$ و $f\left(\frac{7}{4}\right)$ ثم احسب $g(f(3))$ و $g(f(6))$ و $g\left(f\left(\frac{7}{4}\right)\right)$.

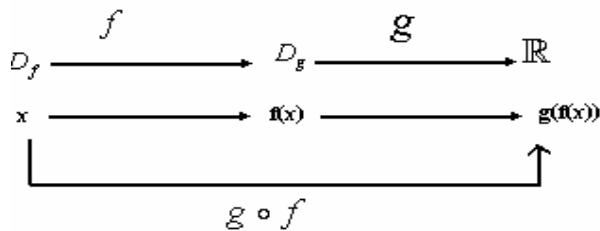
2 - حدد مجالاً I بحيث لكل x من I يمكن حساب $g(f(x))$ ثم حدد $g(f(x))$ لكل x من I .

(2) تعريف:

لتكن f و g دالتين عدديتين حيز تعريفهما D_f و D_g على التوالي. نضع $D = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f; f(x) \in D_g\}$

الدالة h المعرفة على D بما يلي: $h(x) = g(f(x))$ ، تسمى مركب الدالتين f و g في هذا الترتيب ونرمز لها

بالرمز $g \circ f$.



• $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f; f(x) \in D_g\}$

• $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g$

(3) تطبيقات:

1. نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بما يلي: $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.

حدد مجموعة تعريف الدالة $g \circ f$.

2. لتكن f و h الدالتين المعرفتين بما يلي : $f(x) = 2x - 1$ و $h(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

حدد دالة g بحيث : $h = g \circ f$.

3. لتكن f و g الدالتين المعرفتين بما يلي : $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = 2x - 1$.

حدد $g \circ f$ و $f \circ g$ ثم قارنهما.

ملاحظة : على العموم لدينا : $g \circ f \neq f \circ g$.

4) رتبة مركب دالتين :

خاصية :

لتكن f و g و دالتين و I و J مجالين ضمن D_f و D_g على التوالي بحيث $f(I) \subset J$

إذا كانت f على تزايدية على I و g تزايدية على J فان : $g \circ f$ تزايدية على I

إذا كانت f على تناقصية على I و g تناقصية على J فان : $g \circ f$ تزايدية على I

إذا كانت f على تزايدية على I و g تناقصية على J فان : $g \circ f$ تناقصية على I

إذا كانت f تناقصية على I و g تزايدية على J فان : $g \circ f$ تناقصية على I

تطبيق :

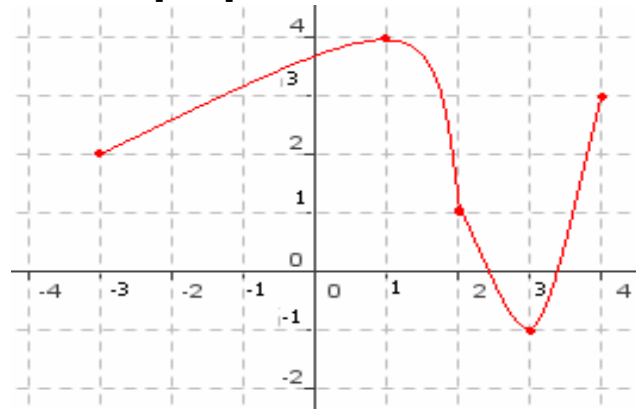
نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بما يلي : $f(x) = 3x - 1$ و $g(x) = x^2 + 1$

باستعمال تغيرات f و g حدد تغيرات الدالتين $f \circ g$ و $g \circ f$.

VII - صورة مجال بدالة عددية :

1) نشاط تمهيدى :

نعتبر الدالة المعرفة على المجال $[-3; 4]$ تمثيلها المبياني هو الشكل التالي :



1 (أ - بين أن : $1 \leq f(x) \leq 4$: $\forall x \in [-3; 2]$.

ب - ليكن $y \in [1; 4]$ بين أن المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا في المجال $[-3; 2]$.

ج - استنتج أن : $f([-3; 2]) = [1; 4]$

2 (حدد مبيانيا صورة كل مجال من المجالات التالية : $[-3; 1]$ و $[2; 4]$ و $[1; 3]$.

2) تعريف :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f و I مجالا ضمن D_f .

صورة المجال I بالدالة f هي المجموعة المكونة من جميع صور عناصر I ونرمز لها بالرمز $f(I)$.

$$f(I) = \{f(x)/x \in I\}$$

ملاحظات :

$$y \in f(I) \Leftrightarrow \exists x \in I : y = f(x) - 1$$

2 - f دالة عددية حيز تعريفها D_f ؛ I و J مجالان من \mathbb{R} بحيث : $I \subset D_f$.

$$f(I) \subset J \Leftrightarrow \forall x \in I; f(x) \in J$$

