المرجح

I ـ نقطة متزنة ـ مرجح نقطتين متزنتين :

نشاط تمهيدي : (ينجز في دفتر التمارين تمرين 1 و تمرين 2)

تمرين 1 :

نعلق في الطرفين A و B لساق متجانسة جسمين كتلتهما m_A و m_B على التوالي .
(انظر الشكل) حسب قانون أرخميدس فإن التوازن يحصل حينما نعلق الساق
في نقطة G بحيث : $m_A GA = m_B GB$.

1) علل العلاقة المتجهية : $m_A\overrightarrow{GA}+m_B\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

2) ما هو وضع النقطة G في حالة $m_A = m_B$ ؟

3) نفترض أن : $m_A = 0,25Kg$ وأن $\overrightarrow{GB}=-5\overrightarrow{GA}$ ؛ ما هي قيمة m_B ؟

4) إذا كان : $2m_B = 3m_A = 6Kg$ فما هو وضع النقط A و B و G علما أن $AB = 12cm$

تمرين 2 :

A و B نقطتان مختلفتان في المستوى .

1) بين أنه توجد نقطة وحيدة G بحيث : $5\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ثم أنشئ هذه النقطة .

2) ليكن α و β عددين حقيقيين غير منعدمين .

أ - بين أن : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{AM}=\beta\overrightarrow{AB}$.

ب ـ استنتج أنه إذا كان $\alpha+\beta\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G بحيث : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ (1) .

ج ـ استنتج أنه إذا كان $\alpha+\beta=0$ فإنه لا توجد أية نقطة G تحقق العلاقة (1) .

د ـ بين أن : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ تكافئ $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)$ لكل نقطة O من المستوى .

1) نقطة متزنة :

تعريف : لتكن A نقطة من المستوى (P) و α عدد حقيقي . الزوج $(A;\alpha)$ يسمى نقطة متزنة ، ونقول إن A معينة بالمعامل α ، أو أن α هو وزن النقطة A .

2) مرجح نقطتين متزنتين :

خاصية وتعريف :

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ نقطتين متزنتين بحيث : $\alpha+\beta\neq 0$. توجد نقطة وحيدة G بحيث : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ ، كما تسمى أيضا مرجح النظمة المتزنة :
$\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.

ملاحظات :

1. العلاقة $\overrightarrow{AG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ تبين أن النقطة G وحيدة كما تمكن من إنشاء النقطة G .
2. مرجح النظمة المتزنة $\{(A;\alpha);(B;0)\}$ (حيث $\alpha\neq 0$) هي النقطة $G=A$ ، ومرجح النظمة المتزنة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ هي النقطة $G=B$.
3. نفترض أن : $\alpha+\beta=0$ وأن : $A\neq B$. حدد طبيعة المجموعة $E=\{M\in(P)/\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}\}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}
M\in(P) &\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA}-\alpha\overrightarrow{MB}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \alpha\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{BA}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \alpha=0\, ou\, \overrightarrow{BA}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \alpha=0
\end{aligned}$$

إذن : إذا كان $\alpha = 0$ فإن $E = (P)$ وإذا كان $\alpha \neq 0$ فإن $E = \Phi$.

في هاتين الحالتين نقول إن النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ ليس لهما مرجح .

حالة خاصة :

إذا كان $\alpha = \beta$ فإن مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\alpha)$ يسمى مركز ثقل النقطتين A و B .

وفي هذه الحالة لدينا : $\alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

إذن في هذه الحالة G هو منتصف القطعة $[AB]$.

3) خاصيات :

1. صمود المرجح :

ليكن $k \in IR^*$ و G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ حيث $\alpha + \beta \neq 0$.

حدد مرجح النقطتين المتزنتين $(A;k\alpha)$ و $(B;k\beta)$. ما تستنتج ؟

خاصية :

مرجح نقطتين متزنتين لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الحقيقي غير المنعدم .

بتعبير آخر :

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ $\Leftrightarrow$ G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;k\alpha)$ و $(B;k\beta)$

$\forall k \in IR^*$

ملاحظة :

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\alpha)$ ؛ ($\alpha \neq 0$) يكافئ G مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$.

يكافئ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ يكافئ G منتصف القطعة $[AB]$ ونقول أيضا G مركز ثقل النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\alpha)$.

تمرين تطبيقي :

تمرين 3 : تمرين 11 ص 96 (من الكتاب المدرسي : في رحاب الرياضيات)

2. الخاصية المميزة للمرجح :

أنشطة :

1) A و B نقطتان من المستوى و G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;3)$ و $(B;2)$.

احسب $\overrightarrow{MG}$ بدلالة $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ لكل نقطة M من المستوى .

الجواب : $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{5}\left(3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right)$ لكل نقطة M من المستوى .

2) لتكن A و B نقطتين من المستوى و α و β عددان حقيقيان بحيث : $\alpha + \beta \neq 0$.

بين أن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا وفقط إذا كان : $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ لكل نقطة M من المستوى .

خاصية :

A و B نقطتان من المستوى و α و β عددان حقيقيان بحيث : $\alpha + \beta \neq 0$.

يكون G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا وفقط إذا كان : $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ لكل نقطة M من المستوى .

ملاحظات :

1 - إذا كان $M = A$ فإن $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

2 - إذا كان $M = B$ فإن $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$.

و هذا يبين أن (في حالة $A \neq B$) لدينا $G \in (AB)$ أي أن النقط A و B و G مستقيمية .

تطبيقات :

1) لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى (P) . ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$ ، و G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;3)$ و $(B;-5)$.

حدد المجموعة : $E=\{M\in(P)/\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\|\}$

II – مرجح ثلاث نقط متزنة :

أنشطة تمهيدية :

1 – لتكن ABC مثلثا في المستوى .

بين أنه توجد نقطة وحيدة G بحيث : $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ وأنشئ النقطة G .

2 – لتكن A و B و C ثلاث نقط معلومة من المستوى . α و β و γ أعدادا حقيقية .

أ – بين أنه إذا كان $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G بحيث : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

ب – إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ فهل توجد نقطة G بحيث : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ؟

1) خاصية وتعريف :

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى . α و β و γ أعدادا حقيقية .

إذا كان $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G بحيث : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$، كما تسمى أيضا مرجح النظمة المتزنة : $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$.

ملاحظات :

1 - إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ فإن النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ ليس لها مرجح .

2 - إذا كان $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$ فإن مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ يسمى مركز ثقل المثلث ABC (في حالة A و B و C نقط غير مستقيمية)

تمرين تطبيقي :

نعتبر النقط A و B و C و D بحيث : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

حدد α و β و γ بحيث تكون D هي مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$.

الحل : لدينا : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{DB}-4\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}-4\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

بما أن : $7+3-4\neq 0$ فإن D هي مرجح النقط المتزنة $(A;7)$ و $(B;3)$ و $(C;-4)$.

(أي أن : $\alpha=7$ و $\beta=3$ و $\gamma=-4$) .

2) خاصيات :

أ – صمود المرجح :

خاصية :

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ فإنه لكل k من IR^* ، G هي كذلك مرجح النقط المتزنة $(A;k\alpha)$ و $(B;k\beta)$ و $(C;k\gamma)$.

بتعبير آخر: مرجح ثلاث نقط متزنة لا يتغير إذا ضربنا أوزان هذه النقط في عدد حقيقي غير منعدم .

تمرين تطبيقي :

ليكن ABC مثلثا في المستوى .

أنشئ النقطة G مرجح النقط المتزنة $(A;2007)$ و $(B;2007)$ و $(C;-2007)$.

الحل :

G هي مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;-1)$.

إذن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{CB}$

إنشاء النقطة G : الرباعي $AGBC$ متوازي أضلاع

ب – الخاصية المميزة للمرجح :

خاصية :

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ ثلاث نقط متزنة حيث : $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. ولتكن G نقطة من المستوى .
تكون G مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ إذا وفقط إذا كان : لكل نقطة M من المستوى :
$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$.

ملاحظة :

إذا كان $M=A$ فإن : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ هذه العلاقة تمكن من إنشاء النقطة G .

تمرين تطبيقي :

ليكن ABC مثلثا في المستوى والنقطة G مرجح النقط المتزنة $(A;2)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$.

1) احسب المتجهة $\overrightarrow{MG}$ بدلالة $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ لكل نقطة M من المستوى .

2) استنتج $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم $\overrightarrow{BG}$ بدلالة $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$.

3) أنشئ النقطة G .

4) حدد المجموعة (E) للنقط M بحيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=8$

ج – تجميعية المرجح :

أنشطة تمهيدية :

1) ليكن ABC مثلثا في المستوى والنقطة G مرجح النقط المتزنة $(A;2)$ و $(B;1)$ و $(C;-1)$.
وليكن G_1 مرجح النقطتين المتزنتين $(A;2)$ و $(B;1)$.
بين أن النقطة G هي مرجح النقطتين المتزنتين $(G_1;3)$ و $(C;-1)$.

2) الحالة العامة : ليكن G مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ ؛ ($\alpha+\beta+\gamma\neq 0$)
أ – بين أن $\alpha+\beta\neq 0$ أو $\alpha+\gamma\neq 0$ أو $\beta+\gamma\neq 0$.
ب – نفترض أن : $\alpha+\beta\neq 0$. وليكن G_1 مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$.
بين أن : G هي مرجح النقطتين المتزنتين $(G_1;\alpha+\beta)$ و $(C;\gamma)$.

خاصية :

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ ثلاث نقط متزنة حيث : $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ و $\alpha+\beta\neq 0$.
إذا كان G هو مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ و G_1 هو مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$
فإن : G هو مرجح النقطتين المتزنتين $(G_1;\alpha+\beta)$ و $(C;\gamma)$.

تمرين : (ينجز في دفتر التمارين)

نعتبر ABC مثلثا في المستوى ولتكن النقط I و J و K بحيث : I هي مماثلة B بالنسبة للنقطة C و $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ و K هي مماثلة منتصف القطعة $[AB]$ بالنسبة للنقطة A .
بين أن المستقيمات (AI) و (BJ) و (CK) تتقاطع في نفس النقطة E ثم احسب $\overrightarrow{BJ}$ بدلالة $\overrightarrow{BE}$.

تمرين :

ABC مثلث في المستوى ولتكن النقط A' و B' و C' منتصفات القطع $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي .
لتكن G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$. (G هي مركز ثقل المثلث ABC)

1) بين أن G هو مرجح النقطتين المتزنتين $(A';2)$ و $(A;1)$ ثم احسب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AA'}$.

2) بين أن المستقيمات (AA') و (BB') و (CC') تتقاطع في نقطة واحدة هي النقطة G .

III – مرجح أربع نقط متزنة :

* نعرف مرجح أربع نقط متزنة بنفس الطريقة التي عرفنا بها مرجح ثلاث نقط متزنة .

مثال :

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O . لدينا : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$
وهذا تعني أن : O هي مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$ و $(D;1)$.
النقطة O تسمى أيضا مركز ثقل متوازي الأضلاع $ABCD$.

* خاصيات مرجح أربع نقط متزنة هي نفس خاصيات ثلاث نقط متزنة .

IV – إحداثيتا المرجح :

نعتبر المستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$. ولتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ و $(D;d)$ نقطا متزنة من المستوى .

1) إحداثيتا مرجح نقطتين متزنتين :

إذا كان G هو مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ فإن إحداثيتي G في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ هما : $\begin{cases} x_G = \dfrac{ax_A + bx_B}{a+b} \\ y_G = \dfrac{ay_A + by_B}{a+b} \end{cases}$

مثال :

لتكن $A(2;3)$ و $B(-1;5)$. إحداثيتا G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;4)$ و $(B;-3)$ هما :

2) إحداثيتا مرجح ثلاث نقط متزنة : (تنقل من الكتاب المدرسي ص 92)

إذا كان G هو مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ فإن إحداثيتي G هما : $\begin{cases} x_G = \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \\ y_G = \dfrac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \end{cases}$

مثال

3) إحداثيتا مرجح أربع نقط متزنة :

إذا كان G هو مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ و $(D;d)$ فإن إحداثيتي G هما :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G = \dfrac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a+b+c+d} \end{cases}$$

مثال :

التمرين 3 :

ABC مثلث في المستوى .

1) أنشئ النقطة D مرجح النظمة المتزنة $\{(B;2);(C;-3)\}$.

2)) أنشئ النقطة E مرجح النظمة المتزنة $\{(A;1);(C;-3)\}$.

3)) أنشئ F مرجح النظمة المتزنة $\{(A;1);(B;2)\}$.

4) بين أن (AD) و (BE) و (CF) مستقيمات متوازية .

5) أ ـ نعتبر G مرجح النقط المتزنة : $(A;3)$ و $(B;-1)$ و $(C;2)$. حدد زوج إحداثيتي G في المعلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

ب ـ حدد طبيعة المجموعة (Γ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 8AB$