

# تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته

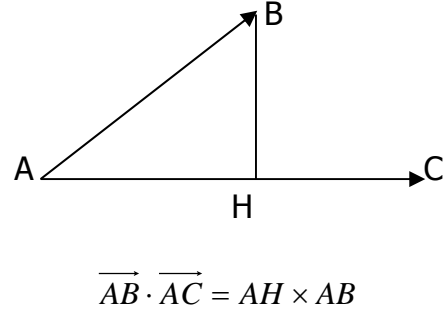
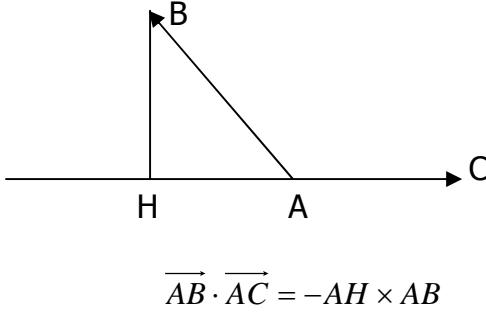
## I - الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم :

### 1) تذكير وإضافات :

#### أ - تعريف الجداء السلمي لمتجهتين :

#### صيغة الجداء السلمي باستعمال الإسقاط العمودي :

- لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  ثلاث نقط في المستوى و  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $B$  على المستقيم  $(AC)$  .  
 الجداء السلمي للمتجهتين  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  هو العدد الحقيقي  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  والذي يحقق :
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AH \times AC$  إذا كانت المتجهتين  $\vec{AH}$  و  $\vec{AC}$  لهما نفس المنحى .
  - $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AH \times AC$  إذا كانت المتجهتين  $\vec{AH}$  و  $\vec{AC}$  لهما المنحيان متعاكسان .



### الصيغة المثلثة للجداء السلمي :

- لتكن  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  متجهتين في المستوى لدينا :  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{AB}; \vec{AC})$
- لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين في المستوى لدينا :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$

## ب - المعلم المتعامد الممنظم المباشر - الأساس المتعامد الممنظم المباشر :

### تعريف :

1. نقول إن متجهتين  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  تكونان أساسا في المستوى إذا كانت  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  غير مستقيمتين . ونكتب  $(\vec{i}; \vec{j})$  أساس في المستوى . والمستوى مزود بأساس  $(\vec{i}; \vec{j})$  .  
 نعتبر  $(\vec{i}; \vec{j})$  أساسا في المستوى و  $O$  نقطة من المستوى .
2. نقول إن  $(\vec{i}; \vec{j})$  أساس متعامد ممنظم إذا كان :  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$  و  $\|\vec{i}\| = 1$  و  $\|\vec{j}\| = 1$  .
3. نقول إن المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم متعامد ممنظم إذا كان  $(\vec{i}; \vec{j})$  أساسا متعامدا ممنظما .
4. إذا كان  $(\vec{i}; \vec{j})$  أساس متعامد ممنظم و  $(\vec{i}; \vec{j}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  فإننا نقول إن  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم متعامد ممنظم مباشر .

**ملاحظة :** في كل هذا الدرس نعتبر المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر .

## 2) الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم :

### نشاط تمهيدى :

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين في المستوى بحيث :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  و  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

(1) انشر ثم بسط ما يلي :  $(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$  واستنتج :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  .

(2) بين أن :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$  .

### خاصة 1 :

إذا كانت  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  و  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  متجهتين في المستوى فإن :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$  .

أمثلة : نعتبر المتجهات :  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$  و  $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$  و  $\vec{w} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$

حساب  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  و  $\vec{u} \cdot \vec{w}$  و  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  .

### خاصة 2 :

تكون المتجهتان  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  و  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  متعامدتين إذا وفقط إذا كان :  $xx' + yy' = 0$ .

### 3) الصيغة التحليلية لمنظم متجهة ولمسافة نقطتين :

#### أ - منظم متجهة :

لتكن  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  متجهة في المستوى لدينا :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

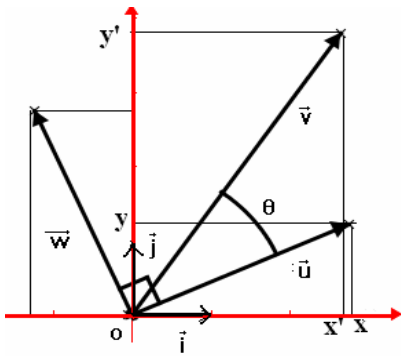
#### ب - المسافة بين نقطتين :

لتكن  $A(x_A; y_A)$  و  $B(x_B; y_B)$  نقطتين في المستوى ، لدينا :  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

### 4) صيغة $\cos\theta$ و $\sin\theta$ :

#### نشاط تمهيدى :

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين غير منعدمتين في المستوى بحيث :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  و  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  و  $\theta$  قياس الزاوية الموجهة  $(\vec{u}; \vec{v})$



1) احسب بطريقتين مختلفتين الجداء السلمي احسب  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

2) استنتج  $\cos\theta$  بدلالة  $x$  و  $y$  و  $x'$  و  $y'$ .

3) نعتبر المتجهة  $\vec{w}$  بحيث :  $(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{\pi}{2}$  و  $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|$ .

أ - بين أن :  $(\vec{v}; \vec{w}) = \frac{\pi}{2} - \theta$ .

ب - احسب الجداء السلمي  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  ثم استنتج أن :  $\sin\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$ .

ج - تحقق أن  $\vec{w}(-y; x)$  ثم احسب  $\sin\theta$  بدلالة  $x$  و  $y$  و  $x'$  و  $y'$ .

د - تحقق أن :  $\sin\theta = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$ .

#### خاصة :

لتكن  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  و  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  متجهتين غير منعدمتين في المستوى و  $\theta$  قياسا للزاوية الموجهة

$(\vec{u}; \vec{v})$ . لدينا :  $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$  و  $\sin\theta = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$ .

### تمارين تطبيقية :

1) حدد قيمة العدد الحقيقي  $m$  بحيث تكون المتجهتان  $\vec{u}(2; m)$  و  $\vec{v}(3; -2)$  متعامدتين.

2) نعتبر المتجهة  $\vec{u}(2; -3)$  حدد المتجهات  $\vec{v}(x; y)$  بحيث يكون  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$  و  $\|\vec{v}\| = 2$ .

3) نعتبر النقط  $A(-3; -1)$  و  $B(1; 1)$  و  $C(-5; 3)$ . بين أن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية ومتساوي الساقين في  $A$ .

4) نعتبر النقط  $A(5; 0)$  و  $B(2; 1)$  و  $C(6; 3)$ .

أ - احسب  $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  و  $\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ .

ب - استنتج قياسا للزاوية الموجهة  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ .

### 5) نتائج :

#### نشاط تمهيدى :

ليكن  $ABC$  مثلثا في المستوى و  $H$  المسقط العمودي ل  $C$  على  $(AB)$ .

1) حدد  $\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  واحسب  $\sin \hat{A}$  (حيث  $\hat{A}$  زاوية هندسية)

2) احسب المساحة  $S$  للمثلث  $ABC$  بدلالة  $AB$  و  $AC$  و  $\sin \hat{A}$ .

3) استنتج أن :  $S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})|$ .

4) نعتبر النقطة  $D$  بحيث يكون  $ABDC$  متوازي أضلاع محدد بالمتجهتين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$ .

احسب مساحة متوازي الأضلاع  $ABDC$ .

اليمني محمد [www.sbaysite.com](http://www.sbaysite.com)

### خاصة 1 :

ليكن  $ABC$  مثلثا في المستوى و  $S$  مساحته ، لدينا :

$$S = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \right| = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \right| = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \right|$$

### خاصة 2 :

مساحة متوازي الأضلاع  $ABDC$  المحدد بالمتجهين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  هي :  $S_{ABDC} = \left| \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \right|$

### تمارين تطبيقية :

- 1 ) نعتبر النقط  $A(5;0)$  و  $B(2;1)$  و  $C(6;3)$  .  
 أ - تحقق أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  غير مستقيمة .  
 ب - احسب مساحة المثلث  $ABC$  .  
 ج - نعتبر النقطة  $D$  بحيث يكون  $ABDC$  متوازي أضلاع . حدد زوج إحداثياتي النقطة  $D$  ثم احسب مساحة متوازي الأضلاع  $ABDC$  .  
 2 ) نعتبر النقط  $A(0;6)$  و  $B(-2;0)$  و  $C(2;1)$  .  
 احسب مساحة المثلث  $ABC$  بطريقتين مختلفتين .

### II - المستقيم في المستوى (دراسة تحليلية) :

#### 1 ) المتجهة المنظمة على مستقيم :

#### نشاط تمهيدى :

- 1 ) نعتبر المستقيم  $(D)$  ذي المعادلة :  $x + 2y + 1 = 0$  .  
 أ - حدد متجهة موجهة  $\vec{u}$  للمستقيم  $(D)$  .  
 ب - نعتبر المتجهة  $\vec{n}(1;2)$  احسب الجداء السلمي  $\vec{n} \cdot \vec{u}$  . ماذا تستنتج ؟  
 المتجهة  $\vec{n}$  تسمى متجهة منظمة على المستقيم  $(D)$  .  
 2 ) نعتبر المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة :  $ax + by + c = 0$  .  
 أ - بين أن المتجهة  $\vec{n}(a;b)$  متجهة منظمة على المستقيم  $(\Delta)$  .  
 ب - تطبيق : حدد متجهة منظمة على المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة :  $x - y + 2 = 0$  .

#### تعريف :

ليكن  $(D)$  مستقيما في المستوى و  $\vec{u}$  متجهة موجهة له .  
 نقول إن متجهة غير منعدمة  $\vec{n}$  منظمة على المستقيم  $(D)$  إذا كانت تحقق :  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  .

### خاصة :

ليكن  $(D)$  مستقيما في المستوى معادلته  $ax + by + c = 0$  .  
 المتجهة  $\vec{n}(a;b)$  منظمة على المستقيم  $(D)$

### 2 ) المعادلة الديكارتية لمستقيم معرف بنقطة و متجهة منظمة عليه :

#### نشاط تمهيدى :

- نعتبر  $\vec{n}(a;b)$  متجهة غير منعدمة و  $A(x_A; y_A)$  نقطة من المستوى .  
 حدد معادلة ديكارتية للمستقيم  $(D)$  المار من  $A(x_A; y_A)$  و  $\vec{n}(a;b)$  متجهة منظمة عليه .

#### خاصة

معادلة المستقيم  $(D)$  المار من  $A(x_A; y_A)$  و  $\vec{n}(a;b)$  متجهة منظمة عليه هي :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

### تمارين تطبيقية :

- 1 ( حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من A(1;1) و  $\vec{n}(2;3)$  متجهة منظمة عليه .  
2 ( ليكن ABC مثلثا في المستوى بحيث A(3;1) و B(-1;5) و C(-2;2) .  
أ - حدد معادلة ديكارتية لارتفاع المثلث المار من الرأس C .  
ب - حدد معادلة ديكارتية لوسط القطعة [AB] .

### 3 ( تعامد مستقيمين :

نعتبر مستقيمين (D) و (D') معادلتها على التوالي :  $ax+by+c=0$  و  $a'x+b'y+c'=0$  و  $\vec{n}(a;b)$  متجهة منظمة على (D) و  $\vec{n}'(a';b')$  متجهة منظمة على (D') .  
يكون (D) و (D') متعامدين إذا وفقط إذا كان  $\vec{n}(a;b)$  و  $\vec{n}'(a';b')$  متعامدين أي :  $aa'+bb'=0$

### خاصة :

يكون المستقيمان (D) و (D') اللذان معادلتها  $ax+by+c=0$  و  $a'x+b'y+c'=0$  على التوالي متعامدين إذا وفقط إذا كان :  $aa'+bb'=0$  .

### تمرين تطبيقي :

- لتكن النقط A(7;4) و B(5;-2) و C(2;1) من المستوى .  
1 ( تحقق أن  $3x-y-17=0$  هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)  
2 ( حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من C

### 4 ( مسافة نقطة عن مستقيم :

### تعريف :

نعتبر مستقيما (D) و A نقطة لا تنتمي إلى (D) و H المسقط العمودي للنقطة A على (D) .  
المسافة AH تسمى المسافة بين A و (D) ونرمز لها بالرمز :  $d(A;(D))$  ونكتب :  $d(A;(D))=AH$

### نشاط تمهيدى :

- نعتبر مستقيما (D) معادلته الديكارتية :  $ax+by+c=0$  و A نقطة لا تنتمي إلى (D) .  
نعتبر H المسقط العمودي للنقطة A على (D) .  
1 ( لتكن  $\vec{n}(a;b)$  متجهة منظمة على المستقيم (D) و B النقطة من المستوى بحيث :  $\vec{AB} = \vec{n}$  .  
بين أن لكل نقطة M من (D) لدينا :  $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB}$  .  
2 ( احسب  $\vec{AM} \cdot \vec{AB}$  بدلالة x و y و  $x_A$  و  $y_A$  و a و b .  
3 ( بين أن  $AH \cdot AB = |ax_A + by_A + c|$  .  
4 ( استنتج أن :  $d(A;(D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

### خاصة :

ليكن (D) مستقيما معادلته الديكارتية :  $ax+by+c=0$  و A نقطة من المستوى .  
مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي :  $d(A;(D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

### تمارين تطبيقية :

- 1 ( نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته  $x+y+2=0$  والنقطتين A(1;-1) و B(0;-2) .  
احسب  $d(A;(D))$  و  $d(B;(D))$  .  
2 ( نعتبر النقطتين A(-1;-3) و B(3;2) .  
أ - تحقق أن  $5x-4y-7=0$  هي معادلة المستقيم (AB) .  
ب - احسب مسافة النقطة O عن المستقيم (AB) .

ج - استنتج مساحة المثلث  $OAB$  .

### III - الدائرة (دراسة تحليلية) :

#### 1 ( معادلة ديكارتية لدائرة :

##### نشاط تمهيدى :

نعتبر الدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega(1;1)$  وشعاعها 2 .

1 ( من بين النقط التالية حدد تلك التي تنتمي إلى الدائرة  $(C)$  :  $A(3;1)$  ;  $B(2;2)$  ;  $C(\sqrt{3}+1;2)$  ;  $D(-1;-1)$  .

2 ( لتكن  $M(x;y)$  نقطة من المستوى .

أ - احسب المسافة  $\Omega M$  بدلالة  $x$  و  $y$  .

ب - بين أن  $M$  تنتمي إلى الدائرة  $(C)$  إذا وفقط إذا كان :  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$  .

المعادلة :  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$  تسمى معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega(1;1)$  وشعاعها 2 .

3 ( بإتباع نفس خطوات السؤال السابق حدد معادلة ديكارتية لدائرة مركزها  $\Omega(a;b)$  وشعاعها  $R$  ( $R > 0$ ) .

#### خاصة :

معادلة الدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega(a;b)$  وشعاعها  $R$  ( $R > 0$ ) هي :  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$  .

وتكتب أيضا :  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  حيث :  $c = a^2 + b^2 - R^2$  .

#### تمارين تطبيقية :

1 ( حدد معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega(1;-1)$  وشعاعها  $\sqrt{2}$  .

2 ( حدد معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega(2;1)$  وتمر من النقطة  $A(-1;1)$  .

3 ( حدد معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  التي تمر من النقط  $A(-1;0)$  و  $B(1;2)$  و  $C(7;4)$  .

#### 2 ( معادلة دائرة معرفة بأحد أقطارها :

##### نشاط تمهيدى :

لتكن  $(C)$  دائرة مركزها  $\Omega$  وشعاعها  $R$  و  $[AB]$  أحد أقطارها . ولتكن  $M$  نقطة من المستوى .

1 ( بين أن :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \Omega M^2 - R^2$  .

2 ( استنتج أن  $(C)$  هي مجموعة النقط  $M$  التي تحقق :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  .

3 ( نعتبر  $A(2;3)$  و  $B(-4;5)$  و  $M(x;y)$  نقطة من  $(C)$  . حدد معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  .

#### خاصة :

لتكن  $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين من المستوى .

مجموعة النقط لنقط  $M$  من المستوى التي تحقق :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  هي الدائرة التي أحد أقطارها  $[AB]$  ؛

ومعادلتها هي :  $(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0$  .

#### تمرين تطبيقي :

حدد معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  التي أحد أقطارها  $[AB]$  حيث :  $A(1;3)$  و  $B(-1;1)$

#### 3 ( تمثيل براميتري لدائرة :

##### نشاط تمهيدى :

نعتبر الدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega(a;b)$  وشعاعها  $R$  و

$M$  نقطة من  $(C)$  حيث :  $(\vec{i}; \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta [2\pi]$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) .

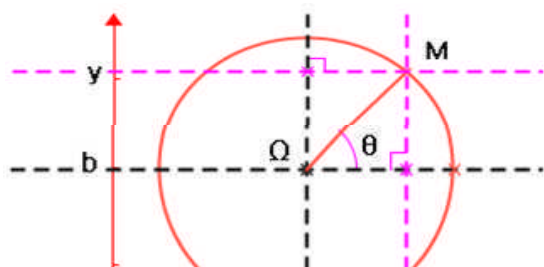
1 ( أ - بين أن :  $\vec{i} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = R \cos \theta$  .

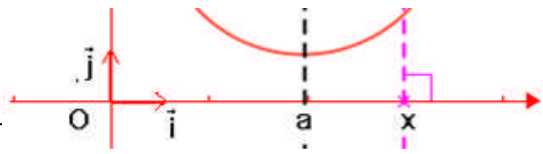
ب - بين أن :  $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = R \sin \theta$  .

2 ( ليكن  $(x;y)$  زوج إحداثيتي النقطة  $M$  .

أ - حدد زوج إحداثيتي المتجهة  $\overrightarrow{\Omega M}$  .

ب - احسب  $\vec{i} \cdot \overrightarrow{\Omega M}$  و  $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\Omega M}$  بدلالة  $x$  و  $y$  و  $a$  و  $b$





ج - استنتج أن :  $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$

النظمة  $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$  تسمى تمثيلا باراميتريا للدائرة (C) التي مركزها  $\Omega(a; b)$  وشعاعها R .

### خاصة وتعريف :

الدائرة (C) التي مركزها  $\Omega(a; b)$  وشعاعها R ( $R > 0$ ) هي مجموعة النقط  $M(x; y)$  من المستوى التي تحقق :  $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$  . النظمة (S) تسمى تمثيلا باراميتريا للدائرة (C) .

### تمارين تطبيقية :

- حدد تمثيلا باراميتريا للدائرة (C) التي معادلتها الديكارتية :  $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 23 = 0$
- حدد مجموعة النقط  $M(x; y)$  من المستوى التي تحقق :  $\begin{cases} x = -1 + 2 \cos \theta \\ y = 3 + 2 \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$

### 4 (دراسة مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ :

نعتبر  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M(x; y)$  التي تحقق :  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  . حدد طبيعة  $(\Gamma)$  .

لدينا :  $M(x; y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + ax) + (y^2 + by) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

نعتبر النقطة  $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$  . لدينا :  $M(x; y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$

• إذا كان :  $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} < 0$  فإن المتساوية  $\Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$  غير صحيحة وفي هذه الحالة :  $(\Gamma) = \Phi$

• إذا كان :  $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = 0$  فإن  $\Omega M^2 = 0$  أي  $\Omega = M$  ومنه فإن :  $(\Gamma) = \{\Omega\}$

• إذا كان :  $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} > 0$  فإن  $\Omega M = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$   $\Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$  وفي هذه الحالة :

( $\Gamma$ ) هي الدائرة التي مركزها  $\Omega$  وشعاعها  $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$  .

### خاصة :

لتكن a و b و c أعدادا حقيقية و ( $\Gamma$ ) مجموعة النقط  $M(x; y)$  التي تحقق :  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  .

• تكون ( $\Gamma$ ) دائرة إذا وفقط إذا كان :  $a^2 + b^2 - 4c > 0$  ومركزها هو  $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$  وشعاعها

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

• إذا كان :  $a^2 + b^2 - 4c < 0$  فإن  $(\Gamma) = \Phi$  .

- إذا كان :  $a^2 + b^2 - 4c = 0$  فإن  $(\Gamma) = \{\Omega\}$  ؛ حيث :  $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$  .

### تمرين تطبيقي :

حدد طبيعة المجموعة (C) مجموعة النقط  $M(x; y)$  التي تحقق المعادلات التالية :

1 (  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$  ) .

2 (  $x^2 + y^2 - x - 10y + 25 = 0$  ) .

3 (  $x^2 + y^2 + 4x - y + \frac{17}{4} = 0$  ) .

### 5 داخل وخارج الدائرة :

#### تعريف :

لتكن (C) دائرة مركزها  $\Omega$  وشعاعها  $R (R > 0)$  و  $M$  نقطة من المستوى .

- تكون  $M$  نقطة من الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان :  $\Omega M = R$  .
- تكون  $M$  نقطة داخل الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان :  $\Omega M < R$  .
- تكون  $M$  نقطة خارج الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان :  $\Omega M > R$  .

#### نتيجة :

لتكن (C) دائرة معادلتها الديكارتية :  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  و  $M(x_0; y_0)$  نقطة من المستوى .

- تكون  $M$  نقطة من الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان :  $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$  .
- تكون  $M$  نقطة داخل الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان :  $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c < 0$  .
- تكون  $M$  نقطة خارج الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان :  $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c > 0$  .

### تمرين تطبيقي :

1 ( لتكن (C) الدائرة التي مركزها  $\Omega(-1; 2)$  وشعاعها  $R = 3$  . حدد وضع النقطتين  $A(3; -1)$  و  $B(0; 1)$  بالنسبة للدائرة (C) .

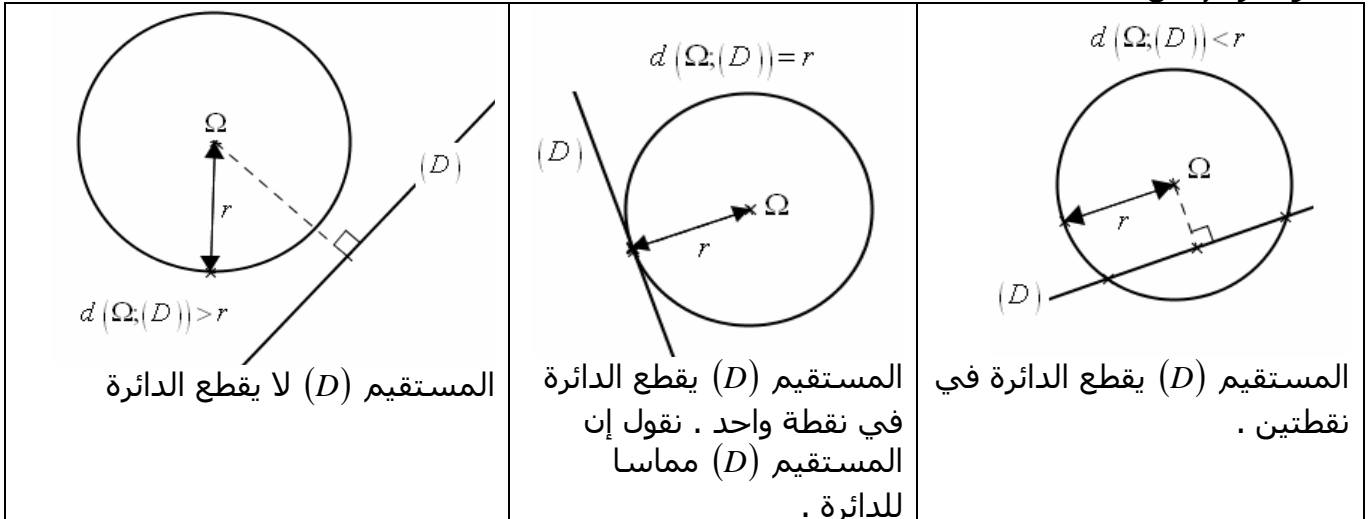
2 ( حل مبيانيا المتراجحات التالية :

أ -  $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 23 \geq 0$  .

ب -  $x^2 + y^2 - 6x < 0$  .

### 6 ( الأوضاع النسبية لدائرة ومستقيم :

لدراسة الوضع النسبي لدائرة (C) مركزها  $\Omega$  وشعاعها  $r$  مع مستقيم (D) ؛ يمكن حساب مسافة (D) عن  $\Omega$  ومقارنتها مع  $r$  .



### تمرين تطبيقي :

ادرس الوضع النسبي للدائرة (C) التي مركزها  $\Omega(-1;2)$  وشعاعها  $R=2$  مع المستقيم (D) في كل حالة من الحالات التالية : 1)  $(D) : x+y+3=0$  ؛ 2)  $(D) : x-y+3+2\sqrt{2}=0$  ؛ 3)  $(D) : 2x+y+1=0$  .

### 7) معادلة المماس لدائرة في نقطة :

#### نشاط تمهيدى :

نعتبر الدائرة (C) التي مركزها  $\Omega(a;b)$  وشعاعها  $R$  و  $A(x_0;y_0)$  نقطة من الدائرة (C) . وليكن (T) المستقيم المماس للدائرة (C) في A .

1) حدد متجهة منظمية على (T) .

2) بين أن معادلة ديكارتية للمستقيم (T) هي :  $(x-x_0)(a-x_0)+(y-y_0)(b-y_0)=0$  .

#### الجواب :

1) يكون المستقيم (T) مماسا للدائرة (C) في A إذا وفقط إذا كان (T) عموديا على المستقيم  $(A\Omega)$  . إذن المتجهة  $\overrightarrow{A\Omega}$  منظمية على المستقيم (T) .

2) تحديد معادلة ديكارتية ل (T) :

$$\text{لدينا : } M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)(a-x_0)+(y-y_0)(b-y_0)=0$$

#### خاصة 1 :

نعتبر الدائرة (C) التي مركزها  $\Omega(a;b)$  وشعاعها  $R$  و  $A(x_0;y_0)$  نقطة من الدائرة (C) . معادلة المماس للدائرة (C) في A هي :  $(x-x_0)(a-x_0)+(y-y_0)(b-y_0)=0$  .

#### ملاحظة :

إذا كانت الدائرة معرفة بمعادلتها الديكارتية  $x^2+y^2+ax+by+c=0$  فإن مركزها هو  $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$  في هذه

الحالة معادلة المماس للدائرة (C) في A هي :  $(x-x_0)\left(\frac{a}{2}+x_0\right)+(y-y_0)\left(\frac{b}{2}+y_0\right)=0$  .

#### خاصة 2 :

نعتبر الدائرة (C) التي معادلتها الديكارتية  $x^2+y^2+ax+by+c=0$  و  $A(x_0;y_0)$  نقطة من الدائرة (C) .

$$\text{معادلة المماس للدائرة (C) في A هي : } (x-x_0)\left(\frac{a}{2}+x_0\right)+(y-y_0)\left(\frac{b}{2}+y_0\right)=0$$

#### تمارين تطبيقية :

1) نعتبر الدائرة (C) التي مركزها  $\Omega(-1;-2)$  وشعاعها  $R=2$  .

أ - تحقق أن النقطة  $A(1;-2)$  تنتمي إلى الدائرة (C) .

ب - حدد معادلة المماس للدائرة (C) في A .

2) نعتبر الدائرة (C) التي معادلتها الديكارتية :  $x^2+y^2-2x+4y-11=0$  .

أ - تحقق أن النقطة  $A(1;2)$  تنتمي إلى الدائرة (C) .

ب - حدد معادلة المماس للدائرة (C) في A .

## تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته ( تمارين )

### التمرين 1 :

- نعتبر النقط  $A(0;6)$  و  $B(-2;0)$  و  $C(2;1)$  .  
 1 ) بين أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  غير مستقيمة .  
 2 ) احسب مساحة المثلث  $ABC$  بطريقتين مختلفتين .

### التمرين 2 :

- نعتبر النقط  $A(-1;-3)$  و  $B(2;1)$  و  $C(6;-2)$  .  
 1 ) احسب  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  واستنتج قيمة  $\cos(\overline{AB}; \overline{AC})$  .  
 2 ) احسب  $BC$  واستنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .  
 3 ) احسب مسافة  $B$  عن المستقيم  $(AC)$  .  
 4 ) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم المار من  $A$  و  $\vec{u}(-1;2)$  متجهة منظمية عليه .

### التمرين 3 :

- نعتبر النقط  $A(0;1)$  و  $B(0;-1)$  و  $C(-1;1)$  .  
 1 ) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم  $(\Delta_A)$  ارتفاع المثلث المار من الرأس  $A$  .  
 2 ) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم  $(\Delta)$  واسط القطعة  $[AB]$  .  
 3 ) أعط تمثيلا باراميتريا للمستقيم  $(D)$  المار من  $C$  والموجه بالمتجهة  $\vec{u}(1;1)$  .  
 4 ) بين أن المستقيمين  $(D)$  و  $(\Delta)$  متعامدان وحدد نقطة تقاطعهما .

### التمرين 4 :

- نعتبر النقط  $A(1;2)$  و  $B(4;3)$  و  $C(2;-1)$  .  
 1 ) بين أن  $(AB) \perp (AC)$  .  
 2 ) احسب مسافة  $A$  عن المستقيم  $(OB)$  .

### التمرين 5 :

- 1 ) حدد معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega(1;1)$  وشعاعها  $R = 2\sqrt{2}$  .  
 2 ) حدد معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega(2;-3)$  وتمر من النقطة  $A(4;-6)$  .  
 3 ) حدد معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  التي أحد أقطارها  $[AB]$  حيث :  $A(-2;1)$  و  $B(4;-1)$  .  
 4 ) أعط تمثيلا باراميتريا للدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega$  وشعاعها  $R$  في الحالتين :  
 أ -  $R = 2$  و  $\Omega(2;-1)$  ؛ ب -  $R = \sqrt{3}$  و  $\Omega(0;-2)$

### التمرين 6 :

- لتكن  $(C)$  مجموعة النقط  $M(x; y)$  بحيث :  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$  .  
 1 ) بين أن  $(C)$  دائرة وحدد مركزها وشعاعها .  
 2 ) تحقق أن النقطة  $A(-1;-1)$  تنتمي إلى الدائرة  $(C)$  ، وحدد معادلة ديكارتية لمماس  $(C)$  في  $A$  .  
 3 ) ادرس وضع النقطتين  $B(3;1)$  و  $C(-2; \frac{1}{2})$  بالنسبة للدائرة  $(C)$  .  
 4 ) حدد معادلتى المماس للدائرة  $(C)$  المارين من النقطة  $B(3;1)$  .

### التمرين 7 :

- لتكن  $(C_m)$  مجموعة النقط  $M(x; y)$  بحيث :  $x^2 + y^2 - 2x + \sqrt{2}y + m = 0$  ؛  $(m \in \mathbb{R})$  .  
 1 ) ناقش حسب قيم البارامتر  $m$  طبيعة المجموعة  $(C_m)$  .  
 2 ) نفترض أن  $m < \frac{3}{2}$  .  
 أ - حدد مركز وشعاع الدائرة  $(C_m)$  .

ب - حدد قيمة العدد  $m$  بحيث يكون المستقيم الذي معادلته  $y = x + 1$  مماسا للدائرة  $(C_m)$  .

## تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته ( تمارين )

### التمرين 1 :

- نعتبر النقط  $A(-1;-3)$  و  $B(2;1)$  و  $C(6;-2)$  .  
1 ) احسب  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  واستنتج قيمة  $\cos(\overline{AB}; \overline{AC})$   
2 ) احسب  $BC$  واستنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .  
3 ) احسب مسافة  $B$  عن المستقيم  $(AC)$  .  
4 ) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم المار من  $A$  و  $\vec{u}(-1;2)$  متجهة منظمية عليه .

### التمرين 2 :

- نعتبر النقط  $A(0;1)$  و  $B(0;-1)$  و  $C(-1;1)$  .  
1 ) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم  $(\Delta_A)$  ارتفاع المثلث المار من الرأس  $A$  .  
2 ) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم  $(\Delta)$  واسط القطعة  $[AB]$  .  
3 ) أعط تمثيلا براميتريا للمستقيم  $(D)$  المار من  $C$  والموجه بالمتجهة  $\vec{u}(1;1)$  .  
4 ) بين أن المستقيمين  $(D)$  و  $(\Delta)$  متعامدان وحدد نقطة تقاطعهما .

### التمرين 3 :

- 1 ) حدد معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega(1;1)$  وشعاعها  $R = 2\sqrt{2}$   
2 ) حدد معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega(2;-3)$  وتمر من النقطة  $A(4;-6)$  .  
3 ) حدد معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  التي أحد أقطارها  $[AB]$  حيث :  $A(-2;1)$  و  $B(4;-1)$  .  
4 ) أعط تمثيلا براميتريا للدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega$  وشعاعها  $R$  في الحالتين :  
أ -  $\Omega(2;-1)$  و  $R = 2$  ؛ ب -  $\Omega(0;-2)$  و  $R = \sqrt{3}$

### التمرين 4 :

- نعتبر النقط  $A(5;3)$  و  $B(4;-2)$  و  $C(0;4)$  .  
1 ) بين أن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية في  $A$  .  
2 ) حدد معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  المحيطة بالمثلث  $ABC$  .  
3 ) حدد مركز وشعاع الدائرة  $(C)$  .  
4 ) حدد معادلة المستقيم المماس للدائرة  $(C)$  في  $A$  .  
5 ) احسب مسافة  $A$  عن المستقيم  $(OB)$  .

### التمرين 5 :

- لتكن  $(C)$  مجموعة النقط  $M(x; y)$  بحيث :  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$  .  
1 ) بين أن  $(C)$  دائرة وحدد مركزها وشعاعها .  
2 ) تحقق أن النقطة  $A(-1;-1)$  تنتمي إلى الدائرة  $(C)$  ، وحدد معادلة ديكارتية لمماس  $(C)$  في  $A$  .  
3 ) ادرس وضع النقطتين  $B(3;1)$  و  $C(-2; \frac{1}{2})$  بالنسبة للدائرة  $(C)$  .

### التمرين 6 :

- لتكن  $(C_m)$  مجموعة النقط  $M(x; y)$  بحيث :  $x^2 + y^2 - 2x + \sqrt{2}y + m = 0$  ؛  $(m \in \mathbb{R})$  .  
1 ) ناقش حسب قيم البراميتير  $m$  طبيعة المجموعة  $(C_m)$  .  
2 ) نفترض أن  $m < \frac{3}{2}$  .  
أ - حدد مركز وشعاع الدائرة  $(C_m)$  .  
ب - حدد قيمة العدد  $m$  بحيث يكون المستقيم الذي معادلته  $y = x + 1$  مماسا للدائرة  $(C_m)$  .