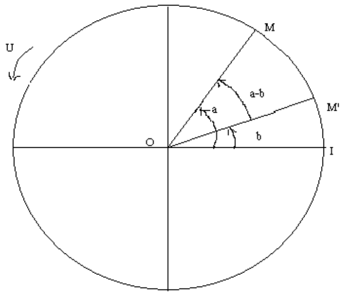
| المستوى: $1^{ème}$BAC<br>STE+STM+SExp | الحساب المثلثي<br>Calcul Trigonométrique | الثانوية التأهيلية الأمير مولاي عبد الله التقنية ـ سيدي قاسم |
|---|---|---|
| عدد الساعات : 8 ساعات | | الأستاذ : محمد اليمني |

## I ـ صيغ التحويل :

### 1 ) تحويل $Cos(a-b)$ و $Cos(a+b)$ :

نعتبر $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلما متعامدا مرتبطا بدائرة مثلثية $(U)$ ؛ وليكن a و b عددين حقيقيين ولتكن $M$ و $M'$ نقطتين من الدائرة المثلثية أفصولاهما المنحنيين a و b على التوالي .




لدينا : $\overrightarrow{OM} = Cosa.\vec{i} + Sina.\vec{j}$ و $OM' = Cosb.\vec{i} + Sinb.\vec{j}$

$(OM;OM') \equiv a-b[2\pi]$ .

إذن : $Cos(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) = \dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}}{OM.OM'} = CosaCosb + SinaSinb$

ومنه فإن : $Cos(a-b) = CosaCosb + SinaSinb$

بتطبيق الصيغ السابقة لدينا :

$Cos(a+b) = Cos(a-(-b)) = CosaCos(-b) + SinaSin(-b)$

$Cos(a+b) = CosaCosb - SinaSinb$

( انظر الشكل بوضوح في الصفحة الأخيرة )

### 2 ) تحويل $Sin(a-b)$ و $Sin(a+b)$ :

نعلم أن $Cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = Sinx$ وأن $Sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = Cosx$ لكل x من IR .

إذن : $Sin(a-b) = Cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)+b\right) = Cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)Cosb - Sin\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)Sinb$

$Sin(a-b) = SinaCosb - CosaSinb$

و : $Sin(a+b) = Cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)-b\right) = Cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)Cosb + Sin\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)Sinb$

$Sin(a+b) = SinaCosb + CosaSinb$

### 3 ) تحويل $\tan(a-b)$ و $\tan(a+b)$ :

وليكن a و b عددين حقيقيين وليكن a و b عددين حقيقيين بحيث : $a \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $b \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $a+b \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$

و $a-b \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ .

لدينا : $\tan(a+b) = \dfrac{Sin(a+b)}{Cos(a+b)} = \dfrac{SinaCosb + CosaSinb}{CosaCosb + SinaSinb} = \dfrac{CosaCosb(\tan a + \tan b)}{CosaCosb(1-\tan a.\tan b}$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a.\tan b}$

$\tan(a-b) = \dfrac{(\tan a + \tan(-b))}{1-\tan a.\tan(-b)}$

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a.\tan b}$

**تطبيقات :**

1 ) احسب $Cos\dfrac{\pi}{12}$ و $Sin\dfrac{\pi}{12}$ و $\tan\dfrac{\pi}{2}$ واستنتج $Cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $Sin\dfrac{5\pi}{12}$

2 ) باستعمال صيغة كل من $Cos(a-b)$ و $Sin(a-b)$ احسب : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ .

## 4 ) نتائج :

من الصيغ السابقة نستنتج أنه إذا كان : a = b فإن :

$Cos(a+a) = Cos2a = Cos^2a - Sin^2a$ وبما أن : $Cos^2a + Sin^2a = 1$ فإن :

$Cos2a = Cos^2a - Sin^2a = 2Cos^2a - 1 = 1 - 2Sin^2a$

ولدينا أيضا : $Sin2a = 2Sina.Cosa$

إذا كان $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $a \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ فإن : $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

**خلاصة :**

| | |
|---|---|
| $Cos(a-b) = CosaCosb + SinaSinb$ | $Cos(a+b) = CosaCosb - SinaSinb$ |
| $Sin(a-b) = SinaCosb - CosaSinb$ | $Sin(a+b) = SinaCosb + CosaSinb$ |
| $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a.\tan b}$ | $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a.\tan b}$ |
| $Cos2a = Cos^2a - Sin^2a = 2Cos^2a - 1 = 1 - 2Sin^2a$ | $Sin2a = 2Sina.Cosa$ ؛ $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ |

**تمرين 1 :**

| | |
|---|---|
| 1 ) أ – تحقق أن : $\frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ . | ب – احسب : $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$ و $\tan\frac{7\pi}{12}$ |
| 2 ) أ – تحقق أن : $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ . | ب – احسب : $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$ و $\tan\frac{11\pi}{12}$ |
| 3 ) بسط ما يلي : <br> أ – $A = \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ . | ب – $B = \sin\left(\frac{5\pi}{6}+x\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{6}+x\right)$ |
| ج – $C = \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \times \tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ ( حيث : $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ و $x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$ ؛ $k \in Z$ ) | |

**تمرين 2:** 1 ) احسب $Cos^2a$ و $Sin^2a$ بدلالة $Cos2a$ .

2 ) أ – بين أن : $Cos3a = 4Cos^3a - 3Cosa$ وأن : $Sin3a = 3Sina - 4Sin^3a$ .

ب – استنتج $Cos^3a$ بدلالة $Cosa$ و $Cos3a$

ج – استنتج $Sin^3a$ بدلالة $Sina$ و $Sin3a$ .

## 5 ) صيغة $Cosa$ و $Sina$ و $\tan a$ بدلالة $\tan\frac{a}{2}$ :

ليكن a عددا حقيقيا بحيث $a \neq \pi + 2k\pi$ .

لدينا : $Cosa = Cos\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right) = Cos^2\frac{a}{2} - Sin^2\frac{a}{2} = \frac{Cos^2\frac{a}{2} - Sin^2\frac{a}{2}}{Cos^2\frac{a}{2} + Sin^2\frac{a}{2}}$ نقسم بسط ومقام هذا الكسر على $Cos^2\frac{a}{2}$

نحصل على : $Cosa = \frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$ ولدينا : $Sina = Sin\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right) = 2Sin\frac{a}{2}Cos\frac{a}{2} = 2\tan\frac{a}{2}Cos^2\frac{a}{2}$

وبما أن $Cos^2\frac{a}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$ فإن : $Sina=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$

وإذا كان $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $a\neq\pi+2k\pi$ فإن : $\tan a=\tan\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$

**خلاصة :**

$$Cosa=\frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \quad ؛ \quad Sina=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \quad ؛ \quad \tan a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$$

إذا وضعنا $t=\tan\frac{a}{2}$ فإن :

$$Cosa=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ؛ \quad Sina=\frac{2t}{1+t^2} \quad ؛ \quad \tan a=\frac{2t}{1-t^2}$$

**تمرين 3 :**

1 ) ليكن a عدد حقيقي بحيث : $\tan a=3$ . احسب : $Cos2a$ و $Sin2a$ و $\tan 2a$ .

2 ) احسب العبير التالي بدلالة $\tan a$ : $-2Sin^2a+2SinaCosa+5$ .

الحل :

$$-2\text{Sin}^2a+2SinaCosa+5=1-2Sin^2a+2SinaCosa+4=Cos2a+Sin2a+4$$

( 2

$$-2\text{Sin}^2a+2SinaCosa+5=\frac{1-\tan^2a}{1+\tan^2a}+\frac{2\tan a}{1+\tan^2a}=\frac{1-\tan^2a+2\tan a}{1+\tan^2a}=\frac{2-(\tan a-1)^2}{1+\tan^2a}$$

## 6 ) تحويل الجداء إلى مجموع :

ليكن a و b عددين حقيقيين وليكن a و b عددين حقيقيين.

لدينا :

$$Cos(a+b)+Cos(a-b)=CosaCosb-SinaSinb+CosaCosb+SinaSinb$$
$$Cos(a+b)+Cos(a-b)=2CosaCosb$$

$$Cos(a+b)-Cos(a-b)=CosaCosb-SinaSinb-CosaCosb-SinaSinb$$
$$Cos(a+b)+Cos(a-b)=-2SinaSinb$$

$$Sin(a+b)+Sin(a-b)=SinaCosb+CosaSinb+SinaCosb-CosaSinb$$
$$Cos(a+b)+Cos(a-b)=2SinaCosb$$

$$Sin(a+b)-Sin(a-b)=SinaCosb+CosaSinb-SinaCosb+CosaSinb$$
$$Cos(a+b)+Cos(a-b)=2CosaSinb$$

من هذه العلاقات نستنتج :

| | |
|---|---|
| 1 ) $CosaCosb=\frac{1}{2}\left[Cos(a+b)+Cos(a-b)\right]$ | 3 ) $CosaSinb=\frac{1}{2}\left[Sin(a+b)-Sin(a-b)\right]$ |
| 2 ) $SinaSinb=-\frac{1}{2}\left[Cos(a+b)-Cos(a-b)\right]$ | 4 ) $SinaCosb=\frac{1}{2}\left[Sin(a+b)+Sin(a-b)\right]$ |

**تمرين 4:**

1 ) اكتب على شكل مجموع الجداءات التالية :

$SinxSin4x$ ؛ $CosxCos3x$ ؛ $Cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)Cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ .

2 ) اكتب على شكل مجموع الجداءات التالية :

$Sin2xSin3xSin5x$ ؛ $CosxCos2xCos3x$ ؛ $CosxCos2x$ ؛ $Sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)Cos2x$

## 7 ) تحويل المجموع إلى جداء :

ليكن a و b عددين حقيقيين .

نضع $p=a+b$ و $q=a-b$ إذن : $a=\frac{p+q}{2}$ و $b=\frac{p-q}{2}$ .

العلاقات 1 ) و 2 ) و 3 ) و 4 ) تصبح :

| | |
|---|---|
| 1 ) $Cosp+Cosq=2Cos\left(\frac{p+q}{2}\right)Cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ | 3 ) $Sinp+Sinq=2Sin\left(\frac{p+q}{2}\right)Cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ |
| 2 ) $Cosp-Cosq=-2Sin\left(\frac{p+q}{2}\right)Sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ | 4 ) $Sinp-Sinq=2Cos\left(\frac{p+q}{2}\right)Sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ |

**تمرين 5 :** 1 ) اكتب المجموع التالي على شكل جداء من أربعة عوامل : $Sinx+Sin3x+Sin5x+Sin7x$ .

2 ) $ABC$ مثلث . بين أن : $Sin\widehat{A}+Sin\widehat{B}+Sin\widehat{C}=4Cos\frac{\widehat{A}}{2}Cos\frac{\widehat{B}}{2}Cos\frac{\widehat{C}}{2}$

## II – تحويل $aCosx+bSinx$ :

ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $(a;b)\neq(0;0)$ .

لدينا : $aCosx+bSinx=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}Cosx+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}Sinx\right)$

ولدينا : $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$ و $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$ لأن : $a^2\leq a^2+b^2$ و $b^2\leq a^2+b^2$ .

وبما أن : $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ فإنه يوجد عدد حقيقي $\alpha$ بحيث :

$Cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $Sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

إذن : $aCosx+bSinx=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}Cosx+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}Sinx\right)$

$$aCosx+bSinx=\sqrt{a^2+b^2}\left(Cos\alpha Cosx+Sin\alpha Sinx\right)$$

$$aCosx+bSinx=\sqrt{a^2+b^2}Cos(x-\alpha)$$

أو : يوجد عدد حقيقي $\beta$ بحيث : $Sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $Cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

في هذه الحالة : $aCosx+bSinx=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}Cosx+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}Sinx\right)$

$$aCosx+bSinx=\sqrt{a^2+b^2}\left(Sin\beta Cosx+Cos\beta Sinx\right)$$

$$aCosx+bSinx=\sqrt{a^2+b^2}Sin(x+\beta)$$

إذن :

| |
|---|
| لكل عددين حقيقيين a و b حيث $(a;b)\neq(0;0)$ لدينا : |
| $aCosx+bSinx=\sqrt{a^2+b^2}Cos(x-\alpha)$ أو $aCosx+bSinx=\sqrt{a^2+b^2}Sin(x+\beta)$ |

**أمثلة :**

.1 $\sqrt{3}Cosx+Sinx=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}Cosx+\frac{1}{2}Sinx\right)=2\left(Cos\frac{\pi}{6}Cosx+Sin\frac{\pi}{6}Sinx\right)=2Cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

1. $Cosx+Sinx=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}Cosx+\frac{\sqrt{2}}{2}Sinx\right)=\sqrt{2}\left(Sin\frac{\pi}{4}Cosx+Cos\frac{\pi}{4}Sinx\right)=\sqrt{2}Sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

**ملاحظة :**

يمكننا تحويل $aCosx+bSinx$ من حل معادلات من نوع $aCosx+bSinx=c$ أو متراجحات من نوع :
$aCosx+bSinx\le c$ أو: $aCosx+bSinx\prec c$ **أو** : $aCosx+bSinx\ge c$ أو : $aCosx+bSinx\succ c$ .

أمثلة :

1 ) حل في IR المعادلة : $Cosx+\sqrt{3}Sinx=1$ .

## حلول بعض التمارين الواردة في الدرس

**تمرين 5** :

1 ) اكتب المجموع التالي على شكل جداء من أربعة عوامل : $Sinx+Sin3x+Sin5x+Sin7x$ .

لدينا :

$$Sinx+Sin3x+Sin5x+Sin7x=2Sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)Cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)+2Sin\left(\frac{5x+7x}{2}\right)Cos\left(\frac{5x-7x}{2}\right)$$
$$=2Sin2xCosx+2Sin6xCosx=2Cosx(Sin2x+Sin6x)$$
$$=2Cosx\left(2Sin\left(\frac{2x+6x}{2}\right)Cos\left(\frac{2x-6x}{2}\right)\right)=4CosxSin4xCos2x=8CosxCos2xSin2xCos2x$$

إذن : $Sinx+Sin3x+Sin5x+Sin7x=8\cos x\cos 2x\sin 2x\cos 2x$

2 ) $ABC$ مثلث . نبين أن : $Sin\widehat{A}+Sin\widehat{B}+Sin\widehat{C}=4Cos\frac{\widehat{A}}{2}Cos\frac{\widehat{B}}{2}Cos\frac{\widehat{C}}{2}$ .

لدينا : $SinA+SinB=2Sin\left(\frac{A+B}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ .

بما أن : في مثلث $ABC$ لدينا : $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi$ فإن : $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

إذن : لدينا : $SinA+SinB=2Sin\left(\frac{A+B}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=2Sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=2Cos\frac{C}{2}Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ .

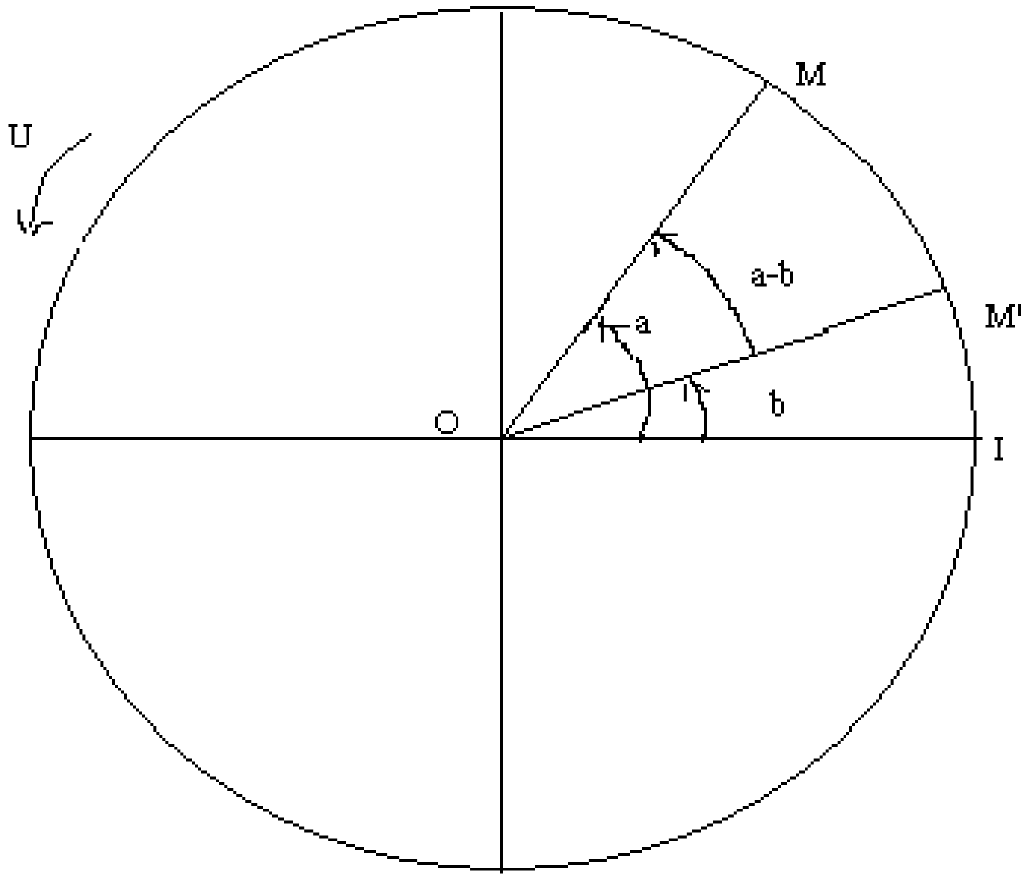
ولدينا : $SinC=2Sin\frac{C}{2}Cos\frac{C}{2}$ .

إذن : $SinA+SinB+SinC=2Cos\frac{C}{2}\left(Sin\frac{C}{2}+Cos\frac{A-B}{2}\right)=2Cos\frac{C}{2}\left(Cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)+Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right)$

ولدينا :

$$Cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)+Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=2Cos\left(\frac{\pi-C+A-B}{4}\right)Cos\left(\frac{\pi-C-A+B}{4}\right)$$
$$Cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)+Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=2Cos\left(\frac{\pi+A-(C+B)}{4}\right)Cos\left(\frac{\pi+B-(C+A)}{4}\right)$$
$$Cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)+Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=2Cos\left(\frac{\pi+A-\pi+A}{4}\right)Cos\left(\frac{\pi+B-\pi+B}{4}\right)=2Cos\frac{A}{2}Cos\frac{B}{2}$$

إذن : $SinA+SinB+SinC=2Cos\frac{C}{2}\times 2Cos\frac{A}{2}Cos\frac{B}{2}=4Cos\frac{A}{2}Cos\frac{B}{2}Cos\frac{C}{2}$ .


U
M
a-b
M'
a
O
b
I