اتصال الدوال العددية

I ـ اتصال دالة في نقطة ـ الاتصال على مجال :

1) اتصال دالة في نقطة :

نشاط تمهيدي :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2} & ; \quad x\neq 2 \\ f(2)=4 \end{cases}$

1 ـ حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2 ـ احسب $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

3 ـ أنشئ التمثيل المبياني للدالة f .

نلاحظ أن : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. نقول إن الدالة f متصلة في 2 .

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I .

نقول إن f دالة متصلة في a إذا كان : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

ملاحظة :

إذا كانت f غير متصلة في a فإننا نقول إن f منقطعة في a .

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2} & ; \quad x\neq 2 \\ f(2)=a & ; \quad a\in IR \end{cases}$

حدد قيمة العدد الحقيقي a لكي تكون f دالة متصلة في 2 .

2) الاتصال على اليمين ـ الاتصال على اليسار :

نشاط تمهيدي :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ; \quad x\succ 0 \\ f(x)=\dfrac{x}{x^2 2x} & ; \quad x\prec 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

1 ـ تحقق أن : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ ، نقول إن f دالة متصلة على اليمين في 0 .

2 ـ تحقق أن : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ ، نقول إن f دالة متصلة على اليسار في 0 .

3 ـ هل الدالة f دالة متصلة في 0 ؟

تعريف 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a;a+r[$ حيث : r عدد حقيقي موجب قطعا .

نقول إن f دالة متصلة على اليمين في a إذا كان : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

تعريف 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]a-r;a]$ حيث : r عدد حقيقي موجب قطعا .

نقول إن f دالة متصلة على اليمين في a إذا كان : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I .

تكون f دالة متصلة في a إذا وفقط إذا كانت f متصلة على اليمين و متصلة على اليسار في a .

تطبيق :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 3x \quad ; \quad (x \prec -1) \\ f(x) = x^2 + 4 \quad ; \quad (-1 \le x \le 0) \\ f(x) = \dfrac{2x^2 + 4x}{x} \quad ; \quad (x \succ 0) \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f في كل من النقط : 1- و 1 و 0 .

3) الاتصال على مجال :

تعريف :

- نقول إن f دالة متصلة على مجال مفتوح I إذا كانت متصلة في كل عدد من I .
- نقول إن f دالة متصلة على مجال مغلق $[a;b]$ إذا كانت متصلة في كل عدد من المجال المفتوح $]a;b[$ ومتصلة على اليمين في a وعلى اليسار في b .

ملاحظات :

- نعرف بالمثل الاتصال على المجال $]a;b]$ وعلى المجال $[a;b[$.
- التمثيل المباني لدالة متصلة على مجال $[a;b]$ هو خط متصل طرفاه النقطتان اللتان إحداثيتاهما $(a; f(a))$ و $(b; f(b))$.

خاصيات :

1) كل دالة حدودية متصلة على IR .
2) كل دالة جذرية متصلة على كل مجال من مجموعة تعريفها .
3) الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على IR^+ .

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة f المعرفة في التمرين التطبيقي السابق .
ادرس اتصال الدالة f على IR .

4) العمليات على الدوال المتصلة :

خاصية :

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على مجال I فإن الدوال : $f+g$ و fg و λf ؛ $(\lambda \in IR)$ متصلة على I .
- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على مجال I و $g(x) \neq 0$ لكل x من I فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتين على المجال I .

أمثلة :

1) الدالة : $x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$ متصلة على IR^+ لأنها مجموع الدالتين $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ المتصلتين على IR^+ .
2) الدالة $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ متصلة على $]0;+\infty[$ لأنها مقلوب الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ المتصلة على $]0;+\infty[$ و لا تنعدم على $]0;+\infty[$.
3) الدالة $x \mapsto \frac{x+2}{x^2 + \sqrt{x}}$ متصلة على $]0;+\infty[$ لأنها خارج الدالة $x \mapsto x+2$ المتصلة على $]0;+\infty[$ ؛ على الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ المتصلة على $]0;+\infty[$ و لا تنعدم على $]0;+\infty[$.

تمرين 1 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي : $\begin{cases} f(x)=x+a & ; \quad x \prec 1 \\ f(x)=2x-3 & ; \quad 1 \le x \le 3 \\ f(x)=bx+1 & ; \quad x \succ 3 \end{cases}$

حدد العددين الحقيقيين a و b لكي تكون f دالة متصلة على IR .

تمرين 2 :

بين أن الدالة f متصلة على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2x+\sqrt{x}$ ؛ $I=[0;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ ؛ $I=IR$.

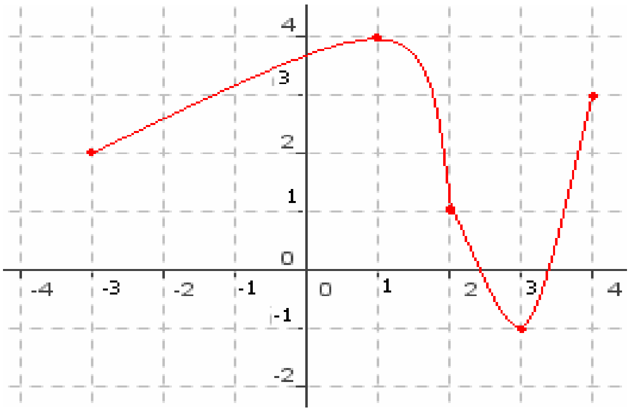
3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$ ؛ $I=]0;+\infty[$.

II – صورة مجال بدالة متصلة :

1) صورة قطعة – صورة مجال :

نشاط تمهيدي :

نعتبر الدالة المعرفة على المجال $[-3;4]$ بتمثيلها المبياني التالي :



حدد صورة كل مجال من المجالات التالية : $[-3;1]$ و $[2;4]$ و $[1;3]$ و $[-3;4]$.

نقبل الخاصية التالية :

خاصية :

صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة .

صورة مجال بدالة متصلة هي مجال .

ملاحظات :

1. اتصال دالة هو شرط كاف لكي تكون صورة مجال هي مجال ، لكن هذا الشرط غير لازم بحيث يمكن أن تكون صورة مجال بدالة غير متصلة هي مجال .

مثال : نعتبر الدالة المعرفة على المجال $[-1;2]$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=2x & ; \quad x \in [-1;1] \\ f(x)=x-1 & ; \quad x \in]1;2] \end{cases}$

أنشئ التمثيل المبياني لدالة f ولاحظ أن صورة المجال $[-1;2]$ بالدالة f هي المجال $[-2;2]$ رغم أن الدالة f غير متصلة على المجال $[-1;2]$.

2. المجالان I و $f(I)$ ليسا دائما من نفس النوع ، فصورة المجال نصف المفتوح $]-1;2]$ بالدالة $x \mapsto x^2$ هي المجال المغلق $[0;4]$.

3. $f([a;b])=[m;M]$ حيث m هي القيمة الدنيا و M هي القيمة القصوى للدالة f على $[a;b]$.

2) صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة قطعا :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I لدينا النتائج التالية :

الصورة $f(I)$	

المجال I	f متصلة وتزايدية قطعا على I	f متصلة وتناقصية قطعا على I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$[f(a);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);f(a)]$
$]a;b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)[$
$[a;+\infty[$	$[f(a);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);f(a)]$
$]-\infty;a]$	$]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);f(a)]$	$[f(a);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)[$
IR	$]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)[$

3) مبرهنة القيم الوسيطية :

بما أن $f([a;b])=[m;M]$ فإن $f(a)$ و $f(b)$ ينتميان على القطعة $[m;M]$ نستنتج أنه مهما يكن العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن $k\in[m;M]$. إذن : يوجد على الأقل عنصر c من $[a;b]$ بحيث : $f(c)=k$

مبرهنة :

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من المجال I .

لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a;b]$ بحيث : $f(c)=k$.

ملاحظة :

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a)\prec 0$ و $f(b)\succ 0$ فإن 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ حسب مبرهنة القيم الوسيطية فإنه يوجد على الأقل عنصر c من $[a;b]$ بحيث : $f(c)=0$.

العدد c هو حل للمعادلة $f(x)=0$.

نستنتج النتيجة التالية :

نتيجة 1 :

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ بحيث : $f(a)\times f(b)\prec 0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a;b[$.

تمرين تطبيقي :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=x^4+x^2+4x-1$

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-1;1]$.

نتيجة 2 :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال $[a;b]$ بحيث : $f(a)\times f(b)\prec 0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a;b[$.

تمرين :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=x^3+4x-1$

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$.

III – اتصال مركب دالتين :

نشاط تمهيدي :

نعتبر f و g الدالتين المعرفتين بما يلي : $f(x)=x^2+x+1$ و $g(x)=\sqrt{x}$.

1) حدد الدالة gof

2) ادرس اتصال f في 0 واتصال g في $f(o)$

3) ادرس اتصال الدالة gof في 0 .

نقبل الخاصية التالية :

خاصية :

- لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث : $f(I)\subset J$ وليكن a عنصرا من I . إذا كانت f دالة متصلة في a و g دالة متصلة في $f(a)$ فإن gof دالة متصلة في a .
- إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و g دالة متصلة على مجال J بحيث : $f(I)\subset J$ فإن gof دالة متصلة على المجال I .

تمرين :

1) باستعمال مركب دالتين ادرس اتصال الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\sin\left(x^2-3x+2\right)$ على IR .

2) باستعمال مركب دالتين ادرس اتصال الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ على $[-1;1]$.

نتائج :

1) إذا كانت f دالة متصلة وموجبة على مجال I (أي : $(\forall x\in I;\ f(x)\geq 0)$) فإن الدالة : $x\mapsto\sqrt{f(x)}$ متصلة على المجال I.

2) إذا كانت f دالة متصلة على مجال I فإن الدالة : $x\mapsto\sin(f(x))$ متصلة على المجال I.

3) إذا كانت f دالة متصلة على مجال I فإن الدالة : $x\mapsto\cos(f(x))$ متصلة على المجال I.

تمرين :

1) ادرس اتصال الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-1}{x-1}}$ على المجال $]1;+\infty[$.

2) ادرس اتصال الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\cos\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)$ على IR .

IV ـ الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال :

1) تعريف الدالة العكسية وخاصياتها :

نشاط تمهيدي : نشاط 9 ص 18 من الكتاب المدرسي في رحاب الرياضيات .

نقبل الخاصيتين التاليتين :

خاصية 1 :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن لكل عدد حقيقي y من المجال $f(I)$ المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا وحيد في المجال I .

ملاحظة :

من هذه الخاصية نستنتج أنه توجد دالة وحيدة معرفة من المجال $f(I)$ نحو المجال I تربط كل عدد حقيقي y من $f(I)$ بعدد حقيقي وحيد x من I هو الحل الوحيد المعادلة $f(x)=y$.

تعريف :

الدالة التي تربط كل عنصر y من $f(I)$ بالعنصر الوحيد x من I بحيث : $f(x)=y$ تسمى الدالة العكسية للدالة f ويرمز لها بالرمز f^{-1} .

ولدينا : $\forall y\in f(I)\ ;\ \forall x\in I\ :\ f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f(x)=y$.

خاصية 2 :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} :

- الدالة f^{-1} معرفة ومتصلة على المجال $f(I)$
- الدالة f^{-1} رتيبة قطعا على المجال $f(I)$ ولها نفس منحى تغير الدالة f .
- في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=x$.

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على IR^+ بما يلي : $f(x)=x^2$.

الدالة f متصلة وتزايدية قطعا على IR^+ ولدينا : $f(IR^+)=IR^+$

إذن : الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من IR^+ نحو IR^+ .

f^{-1} متصلة وتزايدية قطعا على IR^+ .

لدينا : $x = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \ : \ \forall x \in IR^+ \ ; \forall y \in IR^+$.

إذن : $\forall y \in IR^+ : \ f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

التمثيل المبياني للدالة f^{-1} هو مماثل منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = x$.

<u>تطبيقات :</u>

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt{x-1}$.

1) بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J المطلوب تحديده

2) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

3) مثل في المستوى المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ متعامد ممنظم (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ منحنى f و f^{-1} على التوالي .

<u>2) دالة الجذر من الرتبة n :</u>

ليكن $n \in IN^*$ ؛ الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ ب : $f(x) = x^n$ متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[0;+\infty[$.

إذن : الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال : $f([0;+\infty[) = [0;+\infty[$.

تعريف :

ليكن $n \in IN^*$ ؛ الدالة العكسية للدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ ب : $x \mapsto x^n$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n ؛ ونرمز لها بالرمز $\sqrt[n]{\ }$.

نرمز لصورة x بهذه الدالة بالرمز $\sqrt[n]{x}$ ؛ العدد $\sqrt[n]{x}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد x .

لدينا : $\begin{cases} x = \sqrt[n]{y} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^n \\ x \geq 0 \end{cases}$

خاصية :

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[0;+\infty[$ ولدينا : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

في معلم متعامد ممنظم ؛ منحنى الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ هو مماثل منحنى الدالة $x \mapsto x^n$ بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = x$.

نتائج :

- $(\forall a \in IR^+);(\forall b \in IR^+) : \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$
- $(\forall a \in IR^+);(\forall b \in IR^+) : \sqrt[n]{a} \prec \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \prec b$
- $(\forall a \in IR^+) : (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

<u>حالة خاصة :</u>

إذا كان $n = 2$ فإن دالة الجذر من الرتبة 2 هي دالة الجذر المربع ونكتب صور كل عدد حقيقي x موجب : $\sqrt{x}$ بدل $\sqrt[2]{x}$.

<u>3) العمليات على الجذور من الرتبة n :</u>

ليكن m و n عنصرين من IN^* ؛ و a و b عنصرين من IR^+ يمكن أن نبين العلاقات التالية :

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
- $\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ و $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (إذا كان $b \neq 0$)
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ و $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$

<u>تطبيقات :</u>

1) بسط العدد : $A = \dfrac{\sqrt[5]{128} \times \left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}}\right)^2 \times \sqrt{32}}{\sqrt[3]{\sqrt{50}}}$

2) اجعل مقام العدد $B = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}}$ جذريا .

3) رتب تزايديا الأعداد التالية : $\sqrt[12]{4}$ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt[6]{3}$ و $\sqrt[3]{8}$.

4) حل في IR المعادلات التالية : $x^7 = 128$ و $x^5 = -32$ و $x^4 = 3$ و $x^{10} = -5$.

4) القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا :

تعريف :

ليكن x عدد حقيقي موجب قطعا و r عدد جذري غير منعدم حيث : $r = \frac{m}{n}$ ($m \in Z^*$ و $n \in IN^*$)

القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r هو العدد الذي نرمز له بالرمز x^r والمعرف ب : $x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

أمثلة :

$2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4}$ ؛ $5^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{5^{-2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{5^2}} = \frac{1}{\sqrt{5^2}}$

ملاحظات :

- إذا كان : $r = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ حيث ($m \in Z^*$ و $n \in IN^*$) و($p \in Z^*$ و $q \in IN^*$) فإن : $x^r = \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[q]{x^p}$

  مثال : $r = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ ؛ $x^r = \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[9]{x^6}$.
- لكل r و r' من Q^* ولكل x من IR^{+*} لدينا : $x^r = x^{r'} \Leftrightarrow r = r'$.
- إذا كان $m = 1$ فإن : $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ لكل x من IR^{+*} .

نتائج :

- $(\forall r \in Q^*); (\forall x \in]0;+\infty[) ; x^r \succ 0$
- $(\forall n \in IN^*); (\forall m \in Z^*); (\forall x \in]0;+\infty[) \ \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$

نمدد الخاصيات المتعلقة بالقوى الصحيحة النسبية إلى القوى الجذرية .

خاصية :

لكل x و y من $]0;+\infty[$ ولكل r و r' من Q^* لدينا :

• $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$ • $\left(x^r\right)^{r'} = x^{rr'}$ • $x^r \times y^r = (xy)^r$	• $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$ • $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$ • $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$

تطبيقات :

1) اكتب على شكل قوة أساسها 2 العدد : $A = \sqrt[3]{2^5} \times \sqrt[5]{8} \times \sqrt{2}$

2) بسط العددين : $B = \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}}}{81^{\frac{1}{4}}}$ و $C = \frac{4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{6}{5}} \times 2^{\frac{1}{15}}}{16^{\frac{1}{4}} \times 8^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{1}{3}}}$

3) حدد العدد x بحيث : $(3x+1)^{\frac{2}{5}} = 32$