اشتقاق الدوال العددية

I ـ تذكير :

1) اشتقاق دالة في نقطة :

تعاريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$.

- نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وجد عدد حقيقي l حيث : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$ أو $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$. العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في a ونرمز له بالرمز $f'(a)$ أو $\frac{df}{dx}(a)$. ونكتب : $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ أو $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في a فإن الدالة : $x\mapsto f(a)+(x-a)f'(a)$ (أو الدالة : $h\mapsto f(a)+hf'(a)$) تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة a . وتسمى أيضا التقريب التآلفي للدالة f بجوار a.
العدد : $f(a)+hf'(a)$ هو التقريب التآلفي للعدد $f(a+h)$ بجوار 0 ونكتب : $f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$ بجوار 0.
- معادلة المماس لمنحنى الدالة في a هي : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

2) الاشتقاق على اليمين ـ الاشتقاق على اليسار :

تعريف :

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a;a+\alpha[$ حيث $\alpha \succ 0$. نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في a إذا كان يوجد عدد حقيقي l حيث : $\lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$. العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في a ونرمز له بالرمز $f_d'(a)$ ونكتب : $f_d'(a)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\succ a}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ أو $f_d'(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]a-\alpha;a]$ حيث $\alpha \succ 0$. نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في a إذا كان يوجد عدد حقيقي l حيث : $\lim_{\substack{x\to a\\ x\prec a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$. العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار في a ونرمز له بالرمز $f_g'(a)$ ونكتب : $f_g'(a)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\succ a}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ أو $f_g'(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a\in I$. نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في a و قابلة للاشتقاق على اليسار في a و $f_g'(a)=f_d'(a)$.

3) الاشتقاق على مجال ـ الدالة المشتقة :

تعاريف :

- نقول إن f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .
- نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المغلق $[a;b]$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من المجال المفتوح $]a;b[$ وقابلة للاشتقاق على اليمين في a و قابلة للاشتقاق على اليسار في b .
- الدالة المعرفة على I بما يلي : $x\mapsto f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f ويرمز لها بالرمز f' .
- إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f ويرمز لها بالرمز f'' .

4) الكتابة التفاضلية :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و $y=f(x)$ فإننا نكتب اصطلاحا $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ أو $dy=f'(x)dx$ هذه الكتابة تسمى الكتابة التفاضلية .

5) الدالة المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية ـ العمليات على الدوال المشتقة :

انظر الجدول المرفق

جدول يلخص الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية و قواعد العمليات على الدوال المشتقة

الدالة f	الدالة المشتقة	مجموعة التعريف
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	IR
$a\neq 0 \quad f(x)=ax$	$f'(x)=a$	IR
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	IR
$(n\in IN^*-\{1\}) \quad f(x)=x^n$	$(n\in IN^*-\{1\}) \quad f'(x)=nx^{n-1}$	IR
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	IR^*
$f(x)=\frac{1}{x^n}$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	IR^*
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_f=[0;+\infty[$ غير قابلة للاشتقاق في 0
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	IR
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	IR
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
$f(x)=u(x)+v(x)$	$f'(x)=(u+v)'(x)=u'(x)+v'(x)$	$D_U\cap D_V$
$f(x)=\alpha.u(x)$	$f'(x)=(\alpha.u)'(x)=\alpha.u'(x)$	D_U
$f(x)=u(x).v(x)$	$f'(x)=(u.v)'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$	$D_U\cap D_V$
$f(x)=\frac{1}{v(x)}$	$\left(\frac{1}{v}\right)'(x)=\frac{-v'(x)}{(v(x))^2}$	D_V و $v(x)\neq 0$
$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$	$\left(\frac{u}{v}\right)'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$	$D_U\cap D_V$ و $v(x)\neq 0$
$(n\in IN^*) \quad f(x)=(u(x))^n$	$(n\in IN^*) \quad (u^n)'(x)=nu^{n-1}(x)u'(x)$	D_U
$(n\in Z^*) \quad f(x)=(u(x))^n$	$(n\in Z^*) \quad (u^n)'(x)=nu^{n-1}(x)u'(x)$	D_U و $u(x)\neq 0$
$f(x)=\sqrt{u(x)}$	$(\sqrt{u})'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	D_U و $u(x)\succ 0$

6) اشتقاق الدوال الاعتيادية :

خاصيات :

1. كل دالة حدودية قابلة للاشتقاق على IR .
2. كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجالات مجموعة تعريفها .
3. الدالتين : $x\mapsto \cos x$ و $x\mapsto \sin x$ قابلتان للاشتقاق على IR .

4. الدالة : $x \mapsto \tan x$ قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجالات مجموعة تعريفها $IR - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z \right\}$.

5. الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

II – الاتصال والاشتقاق :

خاصية :

لتكن f معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I ؛ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في a فإن f متصلة في a .

ملاحظة :

عكس هذه الخاصية غير صحيح

مثال مضاد :

لتكن f الدالة المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = |x|$

لدينا f متصلة في 0 لكن f غير قابلة للاشتقاق في 0 لأن $f_d^{'}(0) \neq f_g^{'}(0)$ (تحقق من ذلك)

نتيجة :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I فإن f متصلة على I .

III – اشتقاق مركب دالتين :