الثانوية التأهيلية الأمير مولاي عبد الله التقنية ـ سيدي قاسم	الدوال الأصلية Les fonctions primitives	المستوى: $2^{ème}$BAC STE+STM
الأستاذ : محمد اليمني		عدد الساعات : 5 ساعات

التوجيهات الرسمية
تحدد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية انطلاقا من القراءة العكسية لجدول مشتقات هذه الدوال.

أهداف الدرس
➢ تعرف دالة أصلية لدالة متصلة ➢ تعرف الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية

القدرات المنتظرة
➢ تحديد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية . ➢ استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد الدوال الأصلية لدالة على مجال .

الامتدادات	
➢ الحساب التكاملي ➢ الدوال اللوغاريتمية والأسية .	➢ علوم الحياة والأرض ➢ العلوم الفيزيائية

فقرات الدرس	
➢ الدوال الأصلية لدالة متصلة على مجال ➢ الدوال الأصلية لمجموع دالتين	➢ الدوال الأصلية لجداء دالة في عدد حقيقي ➢ جدول الدوال الأصلية

I ـ الدوال الأصلية لدالة متصلة على مجال :

1) تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I .

كل دالة عددية F قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث : $F'(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \in I$ تسمى دالة أصلية للدالة f على I .

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = x^2 + 2x - 1$

الدالة F المعرفة على IR بما يلي : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 2$ هي دالة أصلية للدالة f لأن F قابلة للاشتقاق على IR

ولدينا : $F'(x) = f(x) \;:\; \forall x \in IR$.

2) خاصيات :

خاصية 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و F دالة أصلية للدالة f على I .

الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال F المعرفة على I بما يلي : $x \mapsto F(x) + k$ حيث k عدد حقيقي .

بين هذه الخاصية

مثال : الدوال الأصلية للدالة f على IR بما يلي : $f(x) = x^2 + 2x - 1$ هي الدوال F المعرفة على IR بما يلي :

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + k$ حيث k عدد حقيقي .

خاصية 2 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و x_0 عنصرا من I و y_0 عدد حقيقي معلوم .

إذا كانت f تقبل دالة أصلية على مجال I فإنه توجد دالة أصلية وحيدة G بحيث : $G(x_0) = y_0$ مثال : في المثال السابق

لدينا : الدوال الأصلية للدالة f هي : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + k$ حيث k عدد حقيقي .

حدد الدالة الأصلية G للدالة f حيث $G(0) = 1$:

لدينا : $k = 1 \Leftrightarrow G(0) = 1$ إذن : $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$ هي الدالة الأصلية للدالة f التي تحقق : $G(0) = 1$.

خاصية 3 :

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I .

II ـ الدوال الأصلية لدالة لمجموع دالتين ولجداء دالة في عدد حقيقي :

خاصية :

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجال I و α عدد حقيقي .

إذا كانت F و G دالتين أصليتين على التوالي للدالتين f و g على I فإن :

- الدالة $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$ على I .
- الدالة $\alpha\, F$ دالة أصلية للدالة $\alpha\, f$ على I .

أمثلة :

- الدوال الأصلية للدالة المعرفة على IR^* بما يلي : $x \mapsto 2\cos x - \frac{1}{x^2}$ هي الدالة المعرفة على IR^* بما يلي : $F(x) = 2\sin x + \frac{1}{x} + k$ حيث k عدد حقيقي .
- الدوال الأصلية للدالة المعرفة على $IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in Z\right\}$ بما يلي : $x \mapsto 2x + \frac{3}{\cos^2 x}$ هي الدالة المعرفة على $IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in Z\right\}$ بما يلي : $F(x) = x^2 + 3\tan x + c$ حيث c عدد حقيقي .

III ـ الدوال الأصلية لدوال اعتيادية ـ الدوال الأصلية والعمليات :

انطلاقا من القراءة العكسية لجدول مشتقات الدوال الاعتيادية و العمليات على الدوال المشتقة نحصل على الجدول التالي :

الدالــــــة f	F دالة أصلية للدالــــــة f	حيز التعريفI
f(x) = a ; $a \in IR$	F(x) = $ax + k$; $k \in IR$	I = IR
$f(x) = x^n$; $n \in IN$	F(x) = $\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$; $k \in IR$	I = IR
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	F(x) = $-\frac{1}{x} + k$; $k \in IR$	I = IR*
$f(x) = \frac{1}{x^n}$; $n \in IN^* - \{1\}$	F(x) = $\frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + k$; $k \in IR$	I = IR*
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	F(x) = $2\sqrt{x} + k$; $k \in IR$	I = $]0;+\infty[$
$f(x) = Cosx$	F(x) = $Sinx + k$; $k \in IR$	I = IR
$f(x) = Sinx$	F(x) = $-Cosx + k$; $k \in IR$	I = IR
$f(x) = 1 + \tan^2 x$	F(x) = $\tan x + k$; $k \in IR$	I=$\left\{x \in IR \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in Z\right\}$

$f(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x)=2\sqrt{u(x)}+k\ ;\ k\in IR$	
$f(x)=Cos(ax+b)\ ;(a\neq 0)$	$F(x)=\dfrac{1}{a}Sin(ax+b)+k\ ;$ $k\in IR$	
$f(x)=Sin(ax+b)\,;(a\neq 0)$	$F(x)=-\dfrac{1}{a}Cos(ax+b)+k\ ;$ $k\in IR$	
$f(x)=(u(x))^r\times u'(x)\ ;r\in Q-\{-1\}$	$F(x)=\dfrac{1}{r+1}(u(x))^{r+1}+k\ ;$ $k\in IR$	
$f(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$	$F(x)=u(x)v(x)+k$	
$f(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$	$F(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}+k$	
$f(x)=u'(ax+b)\ ;\ a\in IR^*\ ;b\in IR$	$F(x)=\dfrac{1}{a}u(ax+b)+k$	

تمارين :

تمرين 1 :

حدد الدوال الأصلية للدالة f المعرفة على I في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=4x^4+3x^3+2x^2+x+1$ ؛ $I=IR$

2) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}+3$ ؛ $I=]0;+\infty[$

3) $f(x)=1+\tan^2 x+\sin x$ ؛ $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

4) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ ؛ $I=IR$

5) $f(x)=2x\sqrt{x^2+1}$ ؛ $I=IR$

تمرين 2 :

1) تمرين 25 ص 67 من الكتاب المدرسي في رحاب الرياضيات .

2) تمرين 26 ص 67 من الكتاب المدرسي في رحاب الرياضيات .

تمرين 3 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $IR-\{1\}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2}{(x-1)^2}$.

1) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-1)^2}$ لكل x من $IR-\{1\}$.

2) استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $IR-\{1\}$.

3) حدد الدالة الأصلية G للدالة f التي تحقق : $G(2)=0$.