

المستوى : 2 ^{ème} BAC STE+STM+SVT+PC عدد الساعات : 10 ساعة	الدوال اللوغاريتمية Les fonctions logarithmes	الثانوية التأهيلية الأمير مولاي عبد الله التقتية - سيدي قاسم الأستاذ : محمد اليمني
---	--	--

www.sbaysite.com

التوجيهات الرسمية

- يتم تقديم دالة اللوغاريتم في بداية السنة الدراسية مباشرة بعد تقديم الدوال الأصلية (والتي يمكن تقديمها خلال درس الاشتقاق) كالدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$.
- يتم قبول النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- تعتبر النهايات المرتبطة بالدالة اللوغاريتمية والدالة الأسية النيبيرية بالإضافة إلى النهايات :
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x$ ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$ ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x$ ؛ حيث : $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ نهايات أساسية .
- استعمال الدوال اللوغاريتمية و الأسية في حل مسائل متنوعة .

أهداف الدرس

<ul style="list-style-type: none"> ➤ التعرف من تحديد دالة أصلية للدالة : $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ ➤ تعرف دالة اللوغاريتم للأساس a ➤ تعرف دالة اللوغاريتم العشري . ➤ توظيف دالة اللوغاريتم في مواد أخرى من مواد التخصص . 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ التعرف من دالة اللوغاريتم النيبري . ➤ تعرف الخاصيات الجبرية لدالة اللوغاريتم النيبري ➤ التعرف من دراسة دالة اللوغاريتم النيبري ➤ تعرف النهايات اللوغاريتمية الأساسية . ➤ التعرف من معرفة المشتقة اللوغاريتمية لدالة ، ومشتقة الدالة : $x \mapsto \ln u(x)$
--	--

القدرات المنتظرة

<ul style="list-style-type: none"> ➤ التعرف من النهايات اللوغاريتمية الأساسية وتوظيفها . ➤ التعرف من دراسة وتمثيل دوال تحتوي على لوغاريتمات . 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ التعرف من الحساب الجبري على اللوغاريتمات . ➤ التعرف من حل معادلات ومتراجحات ونظومات لوغاريتمية . ➤ معرفة وتطبيق اللوغاريتم العشري (خاصة في حل المعادلات من نوع $10^x = a$)
---	---

الامتدادات

<ul style="list-style-type: none"> ➤ علوم الحياة والأرض ➤ العلوم الفيزيائية ➤ العلوم الاقتصادية 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ الحساب التكاملي ➤ الإحصاء والاحتمالات . ➤ الحسابيات .
--	---

فقرات الدرس

<p>I - دالة اللوغاريتم النيبري :</p> <p>(1 تعريف</p> <p>(2 خاصيات (خاصيات جبرية)</p> <p>(3 دراسة وتمثيل الدالة \ln .</p> <p>(4 نهايات اعتيادية</p>	<p>(5 المشتقة اللوغاريتمية لدالة</p> <p>II - دالة اللوغاريتم للأساس a :</p> <p>(1 تعريف ؛ خاصيات</p> <p>(2 دالة اللوغاريتم العشري</p> <p>(3 دراسة وتمثيل الدالة \log_a</p>
--	---

(1) تعريف :

نعلم أن كل دالة متصلة على مجال I تقبل دوال أصلية على I . وبما أن الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ متصلة على المجال $]0; +\infty[$ فإنها تقبل دوال أصلية على المجال $]0; +\infty[$.

تعريف :

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$ والتي تتعدم في 1، تسمى دالة اللوغاريتم النبيري ونرمز لها بالرمز : \ln

$$\ln :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

$$\ln 1 = 0 \text{ و } (\forall x \in]0; +\infty[) ; (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

نتائج :

➤ مجموعة تعريف الدالة \ln هي $]0; +\infty[$

$$\ln 1 = 0$$

➤ الدالة \ln قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا : $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$; $\forall x \in]0; +\infty[$.

➤ الدالة \ln تزايدية قطعاً على $]0; +\infty[$.

لكل a و b من $]0; +\infty[$ لدينا : $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$

و $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$

➤ إشارة $\ln x$: $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

تطبيقات :

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \ln(x+1) + \ln(5-x)$

(2) حل في \mathbb{R} المعادلة : $\ln(x^2 + 2x) = \ln(7x + 6)$

(3) حل في \mathbb{R} المتراحة : $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

(2) خاصيات جبرية :

لكل a و b من $]0; +\infty[$ لدينا :

$$\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n \quad \diamond$$

$$(\ln a)^r = r \ln a \quad \diamond \quad (r \in \mathbb{Q})$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a \quad \diamond$$

$$\ln \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3} \ln a \quad \diamond$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \diamond \quad (\text{الخاصية الأساسية})$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \quad \diamond$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad \diamond$$

ملاحظة :

➤ إذا كان $xy > 0$ فإن : $\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y|$ و $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln|x| - \ln|y|$

➤ إذا كان $x \in \mathbb{R}^*$ فإن : $\ln(x^2) = 2 \ln|x|$.

تطبيقات :

(1) بسط العددين : $A = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$

(حيث : $a > 1$ و $b > 1$) $B = \ln(a^2 - 1) + \ln(b^2 - 1) - \ln((ab + 1)^2 - (a + b)^2)$

3) دراسة الدالة \ln :

- ❖ حسب تعريف الدالة \ln فإنها دالة معرفة ومتصلة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة موجبة قطعاً على $]0; +\infty[$. وبالتالي فإن الدالة \ln تزايدية قطعاً على $]0; +\infty[$.
- ❖ نهايات الدالة عند محددات مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

❖ جدول تغيرات الدالة \ln :

x	0	$+\infty$
$(\ln)'(x)$		$+$
$\ln(x)$		$+\infty$
	$-\infty$	

نتائج :

من جدول تغيرات الدالة \ln نستنتج :

- صورة المجال $]0; +\infty[$ بالدالة \ln هي IR أي $\ln(]0; +\infty[) = IR$
- المعادلة $\ln x = 1$ تقبل حل وحيد في $]0; +\infty[$ نرسم لهذا الحل بالرمز e (قيمة مقربة لهذا العدد هي $e \approx 2,718$).
- لكل عدد جذري r لدينا : $\ln(e^r) = r$

❖ الفروع اللانهائية :

- بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ فإن المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب لمنحنى الدالة \ln .
- يمكن أن نبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. إذن : منحنى الدالة \ln يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

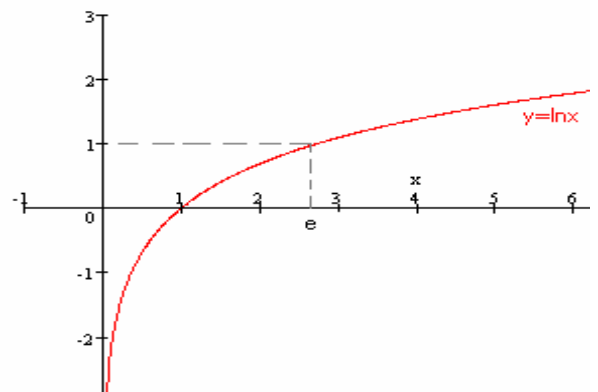
❖ دراسة تقعر منحنى الدالة \ln :

- بما أن : $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$; $(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ فإن $\forall x \in]0; +\infty[$; $\forall x \in]0; +\infty[$.
- إذن : منحنى الدالة \ln مقعر .

❖ معادلة المماس :

- معادلة المماس في النقطة التي أفصولها 1 هي : $y = x - 1$
- معادلة المماس في النقطة التي أفصولها e هي : $y = \frac{1}{e}x$

❖ منحنى الدالة \ln :



4) نهايات هامة :

نقبل النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0^- \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
$$n \in \mathbb{N}^* - \{1\} : \text{حيث } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^* - \{1\} : \text{حيث } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0^-$$

تطبيقات :

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(x^2 - x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (\ln x)^2) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$$

5) المشتقة اللوغاريتمية لدالة :

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I ولا تنعدم على I ($\forall x \in I ; u(x) \neq 0$)

ونعتبر الدالة f المعرفة على I بما يلي : $f : x \mapsto \ln|u(x)|$

بما أن u قابلة للاشتقاق على I فإنها متصلة على I ولدينا u ولا تنعدم على I إذن إما أن تكون موجبة قطعاً أو سالبة قطعاً على I .

- إذا كانت $u > 0$ على I فإن $u(I) \subset]0; +\infty[$ ولدينا : $f(x) = \ln(u(x))$ وبما أن \ln قابلة للاشتقاق على $u(I)$.

إذن : $f = \ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $f'(x) = (\ln \circ u)'(x) = ((\ln)'(u(x))) \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$; $\forall x \in I$

- إذا كانت $u < 0$ فإن $-u > 0$ إذن : $-u(I) \subset]0; +\infty[$ ولدينا : $f(x) = \ln(-u(x))$ وبما أن \ln قابلة للاشتقاق على $]-u(I); +\infty[$.

إذن : $f = \ln \circ (-u)$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا :

$$\forall x \in I \quad ; \quad f'(x) = (\ln \circ (-u))'(x) = ((\ln)'(-u(x))) \times (-u'(x)) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

مبرهنة :

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I ولا تنعدم على I ؛ فإن الدالة $f : x \mapsto \ln|u(x)|$ قابلة للاشتقاق

على المجال I ودالتها المشتقة هي $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. $\forall x \in I$

تعريف :

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I ولا تنعدم على I

الدالة : $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I .

مثال :

نعتبر الدالة u المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $u(x) = x^2 + x + 2$

- الدالة u قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولا تنعدم على \mathbb{R} ولدينا : $u'(x) = 2x + 1$; $\forall x \in \mathbb{R}$

إذن : المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على \mathbb{R} هي الدالة : $x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x+2}$

نتيجة :

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I ولا تنعدم على I .

الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ على I هي الدوال : $x \mapsto \ln|u(x)| + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

أمثلة :

- (1) الدوال الأصلية للدالة : $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ على IR هي الدوال : $x \mapsto \ln|x^2+1|+k$ حيث $k \in IR$.
- (2) الدوال الأصلية للدالة : $x \mapsto \tan x$ على $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ هي الدوال : $x \mapsto \ln|\cos x|+k$ حيث $k \in IR$.
- (3) الدوال الأصلية للدالة : $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ على $]0; +\infty[$ هي الدوال : $x \mapsto \ln|\ln x|+k$ حيث $k \in IR$.
- (4) الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]-\infty; 0[$ هي الدوال : $x \mapsto \ln(-x)+k$ حيث $k \in IR$.
- تمرين :** احسب الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{(1+x^2)^2}$.

II - الدالة اللوغاريتمية للأساس a :

1) تعريف وخصائص :

تعريف :

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعيا ومخالفا للعدد 1 .
الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a ونرمز لها بالرمز : \log_a
 $\log_a :]0; +\infty[\rightarrow IR$

$$x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

نتائج :

$$\log_a 1 = 0 \quad ; \quad \log_a e = \frac{1}{a} \quad ; \quad \log_a(a) = 1$$
$$\ln = \log_e : \text{ إذن } \forall x \in]0; +\infty[\quad ; \quad \log_e(x) = \ln x$$

(دالة اللوغاريتم النيبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e)

خصائص جبرية :

لكل x و y من $]0; +\infty[$ ولكل a من $\{1\}^-]0; +\infty[$ لدينا :

$\log_a(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) + \dots + \log_a(x_n)$ ❖	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ ❖
$(r \in Q) \quad \log_a x^r = r \log_a x$ ❖	$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$ ❖
$\log_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \log_a(x)$ ❖	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ ❖
$\log_a(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3} \log_a(x)$ ❖	

2) دالة اللوغاريتم العشري :

تعريف :

دالة اللوغاريتم العشري هي الدالة اللوغاريتمية للأساس 10 وتكتب \log بدلا من \log_{10} .

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad ; \quad \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$(r \in Q) \quad \log 10^r = r \quad ; \quad \log 1 = 0 \quad ; \quad \log(10) = 1$$

نتائج :

تمرين : (1) احسب : $\log_{\frac{1}{3}} 9$; $\log_9 3$; $\log_2 \frac{1}{2}$; $\log_2 4$; $\log_{e^3} e$.

(2) احسب : $3 \log_{100} 10 - \log_{100} 1,25 + 2 \log_{100} 5 - \log_{100} 2$.

(3) بسط : $2 \log_3(3-x) + \log_3(3+x) - \log_3(9-x^2)$; $x \in]-3; 3[$.

3) دراسة وتمثيل الدالة \log_a :

❖ النهايات عند محددات حيز التعريف :

- إذا كان $a > 1$ فإن $\ln a > 0$ وبالتالي فإن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln a} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln a} = +\infty$

- إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\ln a < 0$ وبالتالي فإن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln a} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln a} = -\infty$

❖ الدالة \log_a قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ولدينا : $(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}$; $\forall x \in]0; +\infty[$

إشارة مشتقة الدالة \log_a مرتبطة بإشارة $\ln a$

- إذا كان $a > 1$ فإن $\ln a > 0$ وبالتالي فإن \log_a تزايدية قطعاً على $]0; +\infty[$.

- إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\ln a < 0$ وبالتالي فإن \log_a تناقصية قطعاً على $]0; +\infty[$.

❖ جدول تغيرات الدالة \log_a :

إذا كان $0 < a < 1$	إذا كان $a > 1$																		
<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$(\log_a)'(x)$</td> <td></td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>$\log_a(x)$</td> <td>$+\infty$</td> <td>$-\infty$</td> </tr> </table>	x	0	$+\infty$	$(\log_a)'(x)$		-	$\log_a(x)$	$+\infty$	$-\infty$	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$(\log_a)'(x)$</td> <td></td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$\log_a(x)$</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table>	x	0	$+\infty$	$(\log_a)'(x)$		+	$\log_a(x)$	$-\infty$	$+\infty$
x	0	$+\infty$																	
$(\log_a)'(x)$		-																	
$\log_a(x)$	$+\infty$	$-\infty$																	
x	0	$+\infty$																	
$(\log_a)'(x)$		+																	
$\log_a(x)$	$-\infty$	$+\infty$																	

❖ التمثيل المبياني للدالة \log_a :

