| الثانوية التأهيلية الأمير مولاي عبد الله التقنية ـ سيدي قاسم | المتتاليات العددية<br>Les suites numériques | المستوى : $2^{ème}$BAC STE+STM |
|---|---|---|
| الأستاذ : محمد اليمني | | عدد الساعات : 15 ساعة |



## التوجيهات الرسمية

لقد تم التطرق خلال السنة الأولى من سلك البكالوريا، إلى عموميات حول المتتاليات العددية وإلى مميزات المتتاليات الحسابية والهندسية وبعض تطبيقاتهما لتعويد التلاميذ على التعامل مع وضعيات متقطعة ووصفها باستعمال المتتاليات،كما كان مناسبة لممارسة بعض أنواع الاستدلالات الرياضية ( البرهان بالترجع على سبيل المثال) . أما خلال هذه السنة فيتم تزويد التلاميذ ببعض الأدوات الضرورية لدراسة سلوك متتالية عددية شموليا وبجوار مالانهاية واستخلاص نتائج بشأنها وتوظيفها في تحديد تقريبات لبعض الأعداد الحقيقية وفي حل مسائل متنوعة من مواد التخصص.

إن درس المتتاليات لا ينتهي بانتهاء الفصل المخصص لها بل ينبغي استثمار نتائجه، كلما سنحت الفرصة لذلك، بمختلف فصول المقرر اللاحقة . كما يتم التركيز على توظيف المتتاليات في حل المسائل المتعلقة بالتاطير والتقريب سواء لأعداد حقيقية أو صيغ وتعابير جبرية ...ويكون هذا الفصل مناسبة لممارسة الاستدلالات الرياضية والدقة في صياغة البراهين والنصوص الرياضية.

## أهداف الدرس

| | |
|---|---|
| ➢ تعرف نهاية متتالية مرجعية<br>➢ تعرف متتالية متقاربة<br>➢ استعمال مصاديق التقارب لتحديد نهاية متتالية .<br>➢ تعرف نهاية $(a^n)$ .<br>➢ تعرف متتالية $(u_n)$ بحيث $u_{n+1} = f(u_n)$ وتحديد نهاية $(u_n)$<br>➢ تعرف متتالية $(u_n)$ بحيث $u_{n+1} = au_n + b$ | ➢ تعرف متتالية $(u_n)$ بحيث $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$<br>➢ استعمال نهايات المتتاليات المرجعية لتحديد نهاية متتالية .<br>➢ دراسة تقارب متتالية تزايدية ومكبورة ومتتالية تناقصية ومصغورة<br>➢ تحديد نهاية متتالية انطلاقا من نهاية متتالية هندسية أو حسابية . |

## القدرات المنتظرة

| | |
|---|---|
| ➢ استعمال متتالية الحسابية والمتتاليات الهندسية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل :<br>$u_{n+1} = au_n + b$ و $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$<br>➢ استعمال المتتاليات المرجعية ومصاديق التقارب لتحديد نهاية متتالية . | ➢ استعمال المتتاليات في حل مسائل متنوعة من مجالات مختلفة .<br>➢ تحديد نهاية متتالية $(u_n)$ متقاربة من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $f$ دالة متصلة على مجال $I$ وتحقق $f(I) \subset I$ |

## الامتدادات

| | |
|---|---|
| ➢ الحساب التكاملي<br>➢ الدوال اللوغاريتمية والأسية .<br>➢ الأعداد العقدية . | ➢ الإحصاء<br>➢ علوم الحياة والأرض<br>➢ العلوم الفيزيائية<br>➢ العلوم الاقتصادية |

| فقرات الدرس | |
|---|---|
| I ـ تذكير<br>II ـ نهاية متتالية : تعريف ؛ المتتالية المتقاربة ؛ خاصيات ؛ نهايات المتتاليات المرجعية<br>III ـ العمليات على النهايات ـ المتتاليات والترتيب | IV ـ مصاديق تقارب متتالية<br>V ـ متتاليات خاصة |

## I ـ تذكيـر :

### 1 ) تعريف متتالية عددية :

- ليكن I جزء من IN . كل دالة عددية من I نحو IR تسمى متتالية عددية . نرمز للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n\in I}$
- إذا كان $I = IN$ فإنه يرمز للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n\in IN}$ أو $(U_n)_{n\geq 0}$ أو $(U_n)$ .
- إذا كان $I = IN^*$ فإنه يرمز للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n\in IN^*}$ أو $(U_n)_{n\geq 1}$ .

### 2 ) المتتاليات المكبورة ـ المتتاليات المصغورة ـ المتتاليات المحدودة :

**تعاريف :**

- تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ مكبورة إذا كان يوجد عدد حقيقي M بحيث : $U_n \leq M$ ( أو $U_n \prec M$ ) لكل n من I .
- تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ مصغورة إذا كان يوجد عدد حقيقي m بحيث : $U_n \geq m$ ( أو $U_n \succ m$ ) لكل n من I .
- تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ محدودة إذا كانت مكبورة ومصغورة . أي يوجد عددين حقيقيين M و m بحيث : $m \leq U_n \leq M$ لكل n من I . ( أو : $m \prec U_n \prec M$ لكل n من I ).

**خاصية :**

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ محدودة إذا وفقط إذا كان يوجد عدد حقيقي $\alpha \succ 0$ بحيث : $|U_n| \leq \alpha$ لكل n من I . ( أو : $|U_n| \prec \alpha$ لكل n من I ) .

### 3 ) المتتاليات الرتيبة :

لتكن $(U_n)_{n\in I}$ متتالية عددية .

- نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تزايدية إذا كان : $\forall n \in I : U_n \leq U_{n+1}$ .
- نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تزايدية قطعا إذا كان : $\forall n \in I : U_n \prec U_{n+1}$ .
- نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تناقصية إذا كان : $\forall n \in I : U_n \succ U_{n+1}$ .
- نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تناقصية قطعا إذا كان : $\forall n \in I : U_n \succ U_{n+1}$ .

**ملاحظات :**

- لدراسة رتابة متتالية $(U_n)_{n\in I}$ نتبع إحدى الطرق التالية :
  1. نقارن $U_n$ و $U_{n+1}$
  2. ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$ .
  3. إذا كانت $U_n \succ 0$ نقارن $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1
  4. إذا كانت $U_n = f(n)$ فإننا نستعمل رتابة الدالة $f$ .
- إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية تزايدية فإن : $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq .....$ .
- إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية تناقصية فإن : $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq .....$ .

### 4 ) المتتاليات الحسابية ـ المتتاليات الهندسية :

#### أ ـ المتتاليات الحسابية :

- **تعريف :**

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ حسابية إذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث : $U_{n+1} = U_n + r$ لكل nمن I . العدد r يسمى أساس المتتالية .

➢ **ملاحظة :**
لكي نبين أن متتالية $(U_n)_{n\in I}$ حسابية يكفي أن نبين أن الفرق $U_{n+1}-U_n$ عدد ثابت لكل n من I . أي غير مرتبط ب n . ( فرق حدين متتابعين عدد ثابت ) .

➢ **خاصيات :**

**1. خاصية مميزة :** تكون $(U_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $U_{n-1}+U_{n+1}=2U_n$ لكل n من I .

**2. صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :**

➢ إذا كانت $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول $U_0$ فإن حدها العام : $U_n=U_0+nr$ .

➢ إذا كانت $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول $U_1$ فإن حدها العام : $U_n=U_1+(n-1)r$

➢ إذا كانت $(U_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول $U_{n_0}$ فإن حدها العام : $U_n=U_{n_0}+(n-n_0)r$ .

**3. مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :**

➢ إذا كانت $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول $U_0$ و $S_n=U_0+U_1+.....+U_{n-1}$ .

فإن : $S_n=\frac{n}{2}(U_0+U_{n-1})$ . بتعبير آخر : مجموع n حد أول من متتالية حسابية $S_n=\frac{n}{2}(U_0+U_{n-1})$

➢ **ملاحظة :**

$$S_n = \frac{\text{( الحد الأول + الحد الأخير ) × عدد الحدود}}{2}$$

**ب) المتتاليات الهندسية :**

➢ **تعريف :**
تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ هندسية إذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث : $U_{n+1}=qU_n$ لكل n من I .
العدد q يسمى أساس المتتالية .

➢ **خاصيات :**

**1. خاصة مميزة :**
تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ هندسية إذا وفقط إذا كان : $U_{n-1}\times U_{n+1}=(U_n)^2$ لكل n من I

**2. الحد العام لمتتالية هندسية :**

➢ إذا كانت $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول $U_0$ فإن : $U_n=U_0q^n$

**3. مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية :**
لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول $U_0$ .
ونعتبر المجموع : $S_n=U_0+U_1+.....+U_{n-1}$ .

➢ إذا كان $q\neq 1$ فإن : $S_n=U_0\frac{1-q^n}{1-q}$ .

➢ إذا كان $q=1$ فإن : $S_n=nU_0$ .

**ملاحظة :**

$$S_n = \frac{\text{الحد الأول} \times (1 - q^{\text{( عدد الحدود )}})}{1 - q}$$

**II – نهايات المتتاليات :**

**1 ) تعريف نهاية متتالية ـ المتتالية المتقاربة:**
نعرف نهاية متتالية كما عرفنا نهاية دالة عددية عند $+\infty$ .
ولدينا أربع حالات ممكنة :
إما أن تكون : $\lim_{n\to+\infty}U_n=l$ ( حيث : $l\in IR$ ) أو $\lim_{n\to+\infty}U_n=+\infty$ أو $\lim_{n\to+\infty}U_n=-\infty$ أو تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ ليست لها نهاية .

**تعريف :** نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ متقاربة إذا كانت نهايتها منتهية ( أي : $\lim_{n\to+\infty}U_n=l$ حيث : $l\in IR$ ).
وإذا كان : أو $\lim_{n\to+\infty}U_n=+\infty$ أو $\lim_{n\to+\infty}U_n=-\infty$ أو $(U_n)_{n\in I}$ ليست لها نهاية فإننا نقول إن $(U_n)_{n\in I}$ غير متقاربة أو متباعدة $(U_n)_{n\in I}$ .

**2 ) خاصيات :**

نقبل الخاصيات التالية :

1. إذا كان لمتتالية نهاية فإن هذه النهاية وحيدة .
2. كل متتالية متقاربة وموجبة تكون نهايتها موجبة .
3. كل متتالية تزايدية ومكبورة هي متتالية متقاربة .
4. كل متتالية تناقصية ومصغورة هي متتالية متقاربة .

**ملاحظة** : الخاصيتان 3 و 4 تبينان فقط أن $(U_n)_{n\in I}$ متقاربة ولا تمكنان من حساب النهاية .

**نتيجتين :**

من الخاصيات السابقة نستنتج أن :

- كل متتالية موجبة وتناقصية هي متتالية متقاربة .
- كل متتالية سالبة وتزايدية هي متتالية متقاربة .

**تمارين تطبيقية**

1 ) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+....+\frac{1}{n^2}$ .

أ ــ بين أن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية تزايدية قطعا ومكبورة .

ب استنتج أن $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة .

الحل :

**أ ــ نبين أن $(u_n)_{n\geq1}$ تزايدية قطعا :**

لدينا : $u_{n+1}-u_n = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+....+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-1-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-....-\frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \succ 0$ .

إذن : $(u_n)_{n\geq1}$ تزايدية قطعا .

*** نبين أن $(u_n)_{n\geq1}$ مكبورة :**

لدينا : لكل $k$ من $IN^*-\{1\}$ $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ و $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

إذن : $u_n = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+....+\frac{1}{n^2} \leq 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

$u_n \leq 1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-....-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} = 2-\frac{1}{n}$

إذن : $\forall n \in IN^*-\{1\} : u_n \leq 2-\frac{1}{n} \prec 2$

ومنه فإن : $(u_n)_{n\geq1}$ مكبورة .

ب ــ استنتاج أن $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة :

لدينا : $(u_n)_{n\geq1}$ تزايدية ومكبورة ؛ إذن : $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة .

2 ) نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي : $V_0 = a \succ 5$ و $V_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n^2+1)$ لكل n من IN .

أ ــ بين أن $(V_n)_{n\geq0}$ تزايدية .

ب ــ بين أن : $n \geq 6 \Rightarrow V_n \succ n$ .

ج ــ ماذا يمكن أن نستنتج ؟

3 ) نعتبر المتتالية الموجبة $(w_n)$ المعرفة بما يلي : $w_0 = 1$ و $w_{n+1} = \frac{2w_n}{3+\sqrt{w_n}}$ لكل n من IN .

أ ــ احسب $w_1$ و $w_2$ .

ب ــ بين أن $(w_n)$ متتالية تناقصية .

ج ــ استنتج أن $(w_n)$ متتالية متقاربة .

**3 ) نهايات المتتاليات المرجعية :**

نقبل النهايات التالية :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad ؛ \quad \lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty \quad ؛ \quad \lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \quad ؛ \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad ؛ \quad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$$. \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad ؛ \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad ؛ \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \quad ؛ \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad ؛ \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

## III ـ العمليات على نهايات المتتاليات ـ المتتاليات والترتيب :

### 1 ) العمليات على النهايات :

نقبل الخاصيات التالية :

خاصيات :

$(U_n)_{n\in I}$ و $(V_n)_{n\in I}$ متتاليتان متقاربتان و $\alpha$ عدد حقيقي . لدينا :

- $\lim_{n\to+\infty}(U_n+V_n) = \lim_{n\to+\infty} U_n + \lim_{n\to+\infty} V_n$ ؛ $\lim_{n\to+\infty}(U_n\times V_n) = \lim_{n\to+\infty} U_n \times \lim_{n\to+\infty} V_n$
- $\lim_{n\to+\infty}(\alpha.U_n) = \alpha.\lim_{n\to+\infty} U_n$ ؛ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{V_n}\right) = \frac{1}{\lim V_n}$ ؛ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{V_n}\right) = \frac{\lim U_n}{\lim V_n}$

توسيع العمليات على نهايات المتتاليات :

نقبل النتائج التالية :

| $\lim U_n$ | $\lim V_n$ | $\lim(U_n+V_n)$ | $\lim(U_n\times V_n)$ | $\lim\frac{1}{V_n}$ | $\lim\frac{U_n}{V_n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| L | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty\ (L\succ 0)$<br>$-\infty\ (L\prec 0)$ | 0 | 0 |
| L | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty\ (L\succ 0)$<br>$+\infty\ (L\prec 0)$ | 0 | 0 |
| $\lim U_n$ | $\lim V_n$ | $\lim(U_n+V_n)$ | $\lim(U_n\times V_n)$ | $\lim\frac{1}{V_n}$ | $\lim\frac{U_n}{V_n}$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | شكل غير محدد |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 0 | شكل غير محدد |
| $-\infty$ | $+\infty$ | شكل غير محدد | $-\infty$ | 0 | شكل غير محدد |
| 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | شكل غير محدد | | |
| 0 | $-\infty$ | $-\infty$ | شكل غير محدد | | |
| | 0 | | | $+\infty$ | |

**تمرين :**

احسب النهايات التالية :

$$. \quad T_n = \frac{2^n+(-2)^n}{3^n} \quad ؛ \quad W_n = n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad ؛ \quad V_n = \sqrt{n}+Cosn \quad ؛ \quad U_n = n+(-1)^n$$

### 2 ) النهاية والترتيب :

خاصية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ و $(v_n)_{n\in I}$ متتاليتين متقاربتين ، و $l$ و $l'$ عددين حقيقيين بحيث : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = l'$ .

* إذا كان : $u_n \succ v_n$ فإن : $l \geq l'$ ؛ * إذا كان : $u_n \succ 0$ فإن : $l \geq 0$ .

## IV ـ مصاديق تقارب متتالية :

**أنشطة تمهيدية** : ( نشاط 7 ص 77 من الكتاب المدرسي : في رحاب الرياضيات )

1 ) لتكن $(v_n)$ المتتالية المعرفة بما يلي : $v_n = 2+\frac{(-1)^n}{n+1}$ : $(\forall n\in IN)$ .

أ ـ بين أن : $|v_n-2| \leq \frac{1}{n}$ : $(\forall n\in IN^*)$ ؛ ب ـ استنتج $\lim_{x\to+\infty} v_n$ .

2 ) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \frac{\sin n}{n^2}+1$ : $\forall n\in IN^*$

أ ـ بين أن : $\forall n \in IN^* \ : \ 1-\frac{1}{n^2} \le u_n \le 1+\frac{1}{n^2}$ .

ب ـ حدد $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ ؛ ثم احسب : $\lim_{x\to+\infty} u_n$ .

3 ) لتكن المتتالية $(w_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي : $w_1 = 1$ و $\forall n \in IN^* \ : w_{n+1} = w_n(1+w_n)$ .

أ ـ بين أن : $\forall n \in IN^* : \ w_n \ge n$ . ؛ استنتج : $\lim_{n\to+\infty} w_n$

نقبل الخاصيات التالية :

**<u>خاصيات :</u>**

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية .

1 ) إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي $n_0$ و $(v_n)$ متتالية عددية و $l \in IR$ بحيث : $\forall n \ge n_0 : |u_n - l| \le v_n$ و $\lim_{x\to+\infty} v_n = 0$

فإن : $(u_n)_{n\in I}$ متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ .

2 ) إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي $n_0$ و $(v_n)$ و $(w_n)$ متتاليين بحيث : $\forall n \ge n_0 \ : \ w_n \le u_n \le v_n$ .

وإذا كان : $\lim_{x\to+\infty} v_n = l$ و $\lim_{x\to+\infty} w_n = l$ ( $l \in IR$ ) فإن : $(u_n)_{n\in I}$ متقاربة و $\lim_{x\to+\infty} u_n = l$ .

3 ) إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي $n_0$ و $(v_n)$ متتالية عددية بحيث : $\forall n \ge n_0 \ : \ v_n \le u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ .

فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ .

4 ) إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي $n_0$ و $(v_n)$ متتالية عددية بحيث : $\forall n \ge n_0 \ : \ u_n \le v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ .

فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ .

**<u>ملاحظة :</u>**

في مصاديق تقارب متتالية نحصل على نفس النتائج إذا عوضنا الرمز $\le$ بالرمز $\prec$ .

**<u>تطبيقات :</u>**

1 ) نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بما يلي : $\forall n \in IN \ : \ u_n = (-1)^n\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)+5$ .

أ ـ بين أن : $\forall n \in IN^* \ : \ \sqrt{n+2}-\sqrt{n} \prec \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

ب ـ استنتج أن : $\forall n \in IN^* \ : \ |u_n - 5| \prec \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

ج ـ استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة وحدد نهايتها .

2 ) نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بما يلي : $\forall n \in IN \ : \ u_n = \frac{(-1)^n + n^2}{n^2+\sin\left(\sqrt{n}\right)+3}$ .

أ ـ بين أن : $\forall n \in IN \ : \ \frac{n^2+1}{n^2+4} \le u_n \le \frac{n^2+1}{n^2+2}$ .

ب ـ استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة واحسب نهايتها .

3 ) نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بما يلي : $\forall n \ge 3 \ : \ u_n = \frac{(-1)^n + n^2}{n-2}$ .

أ ـ تحقق أن : $\forall n \ge 3 \ : \ u_n \ge \frac{n^2-1}{n}$ .

ب ـ استنتج تقارب المتتالية $(u_n)$ واحسب نهايتها .

4 ) نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بما يلي : $\forall n \ge 0 \ : \ u_n = \frac{\sin n - n}{\sqrt{n}+2}$ .

أ ـ تحقق أن : $\forall n \ge 0 \ : \ u_n \le -\sqrt{n}+2$ . ب ـ استنتج تقارب المتتالية $(u_n)$ واحسب نهايتها .

**<u>V ـ متتاليات خاصة :</u>**

## 1) نهاية المتتالية $(q^n)_{n\geq 0}$ :

نعتبر المتتالية الهندسية $(q^n)_{n\geq 0}$ حيث q عدد حقيقي . هناك أربع حالات : $q \succ 1$ أو $q = 1$ أو $-1 \prec q \prec 1$ أو $q \leq -1$ .

نقبل الخاصية التالية :

- إذا كان : $q \succ 1$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ .
- إذا كان : $q = 1$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$ .
- إذا كان : $-1 \prec q \prec 1$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ .
- إذا كان : $q \leq -1$ فإن $(q^n)_{n\geq 0}$ ليست لها نهاية .

**تطبيقات :** احسب نهايات المتتاليات التالية :

$$U_n = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n \quad ؛ \quad V_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} \quad ؛ \quad w_n = \frac{1}{(0.001)^n}$$

## 2) نهاية المتتالية $(n^\alpha)_{n\geq 0}$ حيث $\alpha \in Q^*$ :

نقبل الخاصية التالية :

**خاصية :**

نعتبر المتتالية $(n^\alpha)_{n\geq 0}$ حيث $\alpha \in Q^*$ .

إذا كان : $\alpha \succ 0$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ .

إذا كان : $\alpha \prec 0$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$ .

**أمثلة :** $\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ ؛ $\lim_{n\to+\infty} n^{-2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ ؛ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ ؛ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ .

## 4) المتتاليات من نوع $U_{n+1} = f(U_n)$ :

**مثال:** نعتبر المتتالية $(U_n)$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 3$ و $U_{n+1} = \frac{4U_n - 1}{U_n + 2}$ لكل n من IN .

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $IR - \{-2\}$ بما يلي : $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ .

1. بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا هو $x = 1$ .
2. نعتبر المتتالية $(V_n)$ المعرفة ب : $V_n = U_n - 1$

أ ــ بين أن المتتالية $(V_n)$ لا تنعدم وأن $\left(\frac{1}{V_n}\right)$ متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول .

ب ــ بين أن نهاية $(U_n)$ هي 1 .

نقبل الخاصية التالية :

**خاصية :**

$(U_n)_{n\in I}$ متتالية معرفة بالعلاقة : $U_{n+1} = f(U_n)$ بحيث f دالة متصلة على مجال J من IR و $f(J) \subset J$

إذا كانت $(U_n)_{n\in I}$ متقاربة فإن نهايتها هي حل المعادلة $f(l) = l$ .

**تمرين تطبيقي :** نعتبر المتتالية $(U_n)$ المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{5}{2}U_n(1-U_n)$ لكل n من IN .

1. مثل مبيانيا الدالة f المعرفة على IR ب : $f(x) = \frac{5}{2}x(1-x)$ .
2. نعتبر المجال : $J = \left[\frac{1}{2};\frac{5}{8}\right]$ . بين أن : $f(J) \subset J$ .
3. بين أن المتتالية $(U_n)$ متقاربة وحدد نهاية المتتالية $(U_n)$ .