

دراسة وتمثيل الدوال العددية

I - الفروع اللانهائية :

(1) تعريف :

ليكن (C) منحنى دالة عددية في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
إذا آلت إحدى إحداثيات نقطة من (C) إلى اللانهائية ($+\infty$ أو $-\infty$) فإننا نقول إن (C) تقبل فرعا لا نهائيا .

ملاحظة :

إذا كان D_f (مجموعة تعريف الدالة f) أو $f(D_f)$ تحتوي مجال من نوع $[a; +\infty[$ أو $]-\infty; a]$ فإننا نقول إن (C) تقبل فرعا لا نهائيا .

(2) المستقيمات المقاربة :

1. المقارب الموازي لمحور الأرتاب :

تعريف :

إذا كان : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ فإننا نقول إن

المستقيم ذو المعادلة $x = a$ مقاربا لمنحنى الدالة f .
هذا المقارب مواز لمحور الأرتاب .

أمثلة :

1 - نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x-1}$.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = 3 \times (+\infty) = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = 3 \times (-\infty) = -\infty$

إذن المستقيم ذو المعادلة : $x = 1$ مقارب لمنحنى الدالة f .

2 - نعتبر الدالة : $\tan x$ المعرفة على $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة :

$x = \frac{\pi}{2}$ مقارب لمنحنى الدالة tan .

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة :

$x = -\frac{\pi}{2}$ مقارب لمنحنى الدالة tan . (انظر الشكل)

2. المقارب الموازي لمحور الأفاصيل :

تعريف :

إذا كان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ فإننا نقول إن المستقيم

ذو المعادلة $y = a$ مقاربا لمنحنى الدالة .

(هذا المستقيم مواز لمحور الأفاصيل) .

ملاحظة :

دراسة إشارة $f(x) - a$ تمكننا من معرفة وضع منحنى الدالة

بالنسبة للمقارب .

إذا كان : $f(x) - a \geq 0$ فإن منحنى الدالة f يوجد فوق المقارب

إذا كان : $f(x) - a \leq 0$ فإن منحنى الدالة f يوجد تحت المقارب

أمثلة :

1 - نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 3x + 5}$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 3$ مقارب لمنحنى الدالة بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

دراسة الوضع النسبي للمنحنى والمقارب : ندرس إشارة $f(x) - 3$

$$f(x) - 3 = \frac{11x - 15}{x^2 - 3x + 5}$$

مميز الحدودية : $x^2 - 3x + 5$ هو $\Delta = -11 < 0$ إذن $x^2 - 3x + 5 > 0$ إذن إشارة $f(x) - 3$ هي إشارة $11x - 15$.

إذا كان : $x > \frac{15}{11}$ فإن $11x - 15 > 0$ إذن $f(x) - 3 > 0$

وبالتالي فإن منحنى الدالة f يوجد فوق المقارب على المجال : $\left] \frac{15}{11}; +\infty \right[$

إذا كان : $x < \frac{15}{11}$ فإن $11x - 15 < 0$ إذن $f(x) - 3 < 0$

وبالتالي فإن منحنى الدالة f يوجد تحت المقارب على المجال : $\left] -\infty; \frac{15}{11} \right[$

2 - نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{x^2 + 1}$

لدينا : $D_g = [0; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ (تحقق من ذلك)

إذن المستقيم ذو المعادلة : $y = 0$ مقارب لمنحنى الدالة g بجوار $+\infty$.

3. المقارب المائل :

تعريف :

لتكن f دالة عددية بحيث : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

إذا كان : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

فإن المستقيم ذو المعادلة : $y = ax + b$ ($a \neq 0$) يسمى مقاربا لمنحنى الدالة f.

ملاحظة :

دراسة إشارة : $f(x) - (ax + b)$ يمكننا من معرفة وضع المنحنى بالنسبة للمقارب .

• إذا كان $f(x) - (ax + b) < 0$ فإن المنحنى يوجد تحت المقارب

• إذا كان $f(x) - (ax + b) > 0$ فإن المنحنى يوجد فوق المقارب .

أمثلة :

1 - نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$

إذن المستقيم ذو المعادلة : $y = 2x + 1$ مقارب لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

أدرس الوضع النسبي للمنحنى والمقارب :

2 - نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

بإنجاز القسمة الإقليدية ل $x^2 - 3x + 1$ على $x - 1$ نستنتج أن : $g(x) = x - 2 - \frac{1}{x - 1}$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x - 1} \right) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x - 1} \right) = 0$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب لمنحنى الدالة g بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ملاحظة :

إذا أمكننا كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = ax + b + h(x)$ بحيث $a \neq 0$ و h دالة بحيث $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 0$ فإن

منحنى الدالة f يقبل المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقاربا .

في كثير من الأحيان يصعب كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = ax + b + h(x)$ بحيث $a \neq 0$ و h دالة بحيث $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 0$. الخاصية التالية تمكننا من تحديد معادلة المقارب المائل .

خاصية :

يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ($a \neq 0$) مقاربا مائلا لمنحنى الدالة f إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$$

$$\text{أو :} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b$$

تطبيقات :

1 - نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 4}{(x-2)^2}$.

حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

2 - نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x) = \sqrt{4x^2 + 3x - 2}$.

حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة g بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

4. الاتجاهات المقاربة :

• إذا كان : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ فإننا نقول :

إن منحنى الدالة يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأفاصيل .
أو منحنى الدالة يقبل محور الأفاصيل اتجاها مقاربا .

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ ب $f(x) = \sqrt{x}$

$$\text{لدينا :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

إذن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأفاصيل .

• إذا كان : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ فإننا نقول :

إن منحنى الدالة يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأراتيب .
أو منحنى الدالة يقبل محور الأراتيب اتجاها مقاربا .

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = x^3$

$$\text{لدينا :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

إذن : منحنى الدالة يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

• إذا كان : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$

وكان : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$ فإننا نقول إن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه

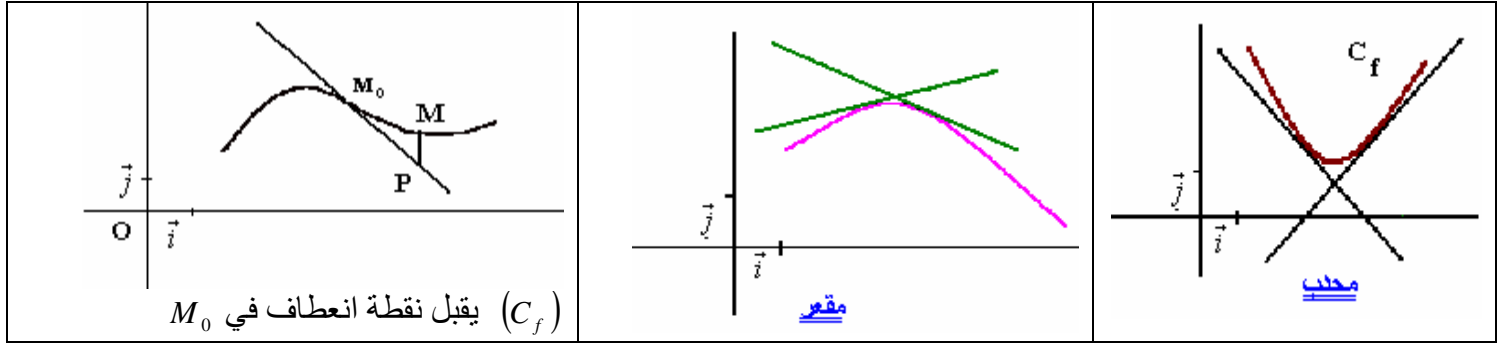
المستقيم ذو المعادلة : $y = ax$ (أو المستقيم ذو المعادلة $y = ax$ اتجاه مقارب لمنحنى الدالة .

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = x + \sqrt{x}$

II - تقع منحنى دالة - نقطة انعطاف منحنى :

(1) تعاريف :

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . و (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
1. نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماساته
 2. نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماساته
 3. نقول إن النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) إذا كان المنحنى (C_f) يخترق مماسه في النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$.



(2) خاصيات :

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I .
- (1) إذا كانت f'' موجبة على I فإن (C_f) يكون محدباً على I .
 - (2) إذا كانت f'' سالبة على I فإن (C_f) يكون مقعراً على I .
 - (3) إذا كانت f'' تتعدم في x_0 وتغير إشارتها فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$.

(3) تطبيقات :

1. نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ ادرس تقر منحنى الدالة f وحدد نقطة انعطافه.
2. نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي: $g(x) = \frac{1-2x}{x^2-x-2}$ ادرس تقر (C_g) منحنى الدالة g وحدد نقط انعطافه.

III - عناصر تماثل منحنى :

(1) مركز تماثل منحنى :

تعريف : ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، و نقطة من المستوى $A(a; b)$ نقول إن النقطة $A(a; b)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطان :

1. $(2a - x) \in D_f$ لكل $x \in D_f$.
2. $f(2a - x) = 2b - f(x)$ لكل $x \in D_f$.

أمثلة :

- (1) نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = -x^3 + 3x^2$ ؛ بين أن النقطة $I(1; 2)$ مركز تماثل (C_f) منحنى الدالة f .
- (2) نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي: $g(x) = x + 2 + \frac{4}{x+3}$ ؛ بين أن النقطة $A(-3; -1)$ مركز تماثل (C_g) منحنى g .
- (3) نعتبر الدالة h المعرفة بما يلي: $h(x) = \frac{x^2 - 2}{x+1}$ ؛ بين أن النقطة $\Omega(-1; -2)$ مركز تماثل (C_h) منحنى الدالة h .

حالة خاصة : إذا كانت f دالة فردية فإن النقطة O أصل المعلم هي مركز تماثل المنحنى.

(2) محور تماثل منحنى :

تعريف : ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

نقول إن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تماثل المنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطان :

1. $(2a - x) \in D_f$ لكل $x \in D_f$.
2. $f(2a - x) = f(x)$ لكل $x \in D_f$.

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ ؛ بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تماثل منحنى الدالة f .

حالة خاصة : إذا كانت f دالة زوجية فإن منحناها يقبل محور الأفاصيل محور تماثل .

IV - تصميم دراسة دالة :

لدراسة دالة عددية f غالبا ما نتبع الخطوات التالية :

1. تحديد مجموعة تعريف الدالة f .
2. دراسة زوجية ودورية الدالة f ثم تحديد مجموعة الدراسة D_E (إذا لم تكن الدالة زوجية ولا فردية ولا دورية فإن مجموعة الدراسة هي D_f مجموعة تعريف الدالة f).
3. حساب النهايات عند محددات مجموعة التعريف .
4. دراسة قابلية اشتقاق f على D_E .
5. دراسة تغيرات الدالة :
 - أ - حساب الدالة المشتقة ودراسة إشارتها
 - ب - استنتاج تغيرات الدالة f ثم إعطاء جدول التغيرات .
6. لتمثيل منحنى الدالة f غالبا ما نتبع المراحل التالية :
 - أ - دراسة الفروع اللانهائية .
 - ب - دراسة الوضع النسبي لمنحنى f بالنسبة لمقارباتها الأفقية والمائلة إن وجدت .
7. تحديد تقاطع منحنى الدالة f مع محوري المعلم (إذا أمكن) وإعطاء مماسات المنحنى في هذه النقاط .
8. دراسة تقعر منحنى الدالة f وتحديد نقط الانعطاف إن وجدت ، وذلك بحساب الدالة المشتقة الثانية ودراسة إشارتها .
9. الرسم :
10. إنشاء في غالب الأحيان معلم متعامد ممنظم مناسب .
 - أ - إنشاء المستقيمات المقاربة .
 - ب - إنشاء المماسات السابقة وكذا الموازية لمحور الأفاصيل (في النقاط التي تنعدم فيها الدالة المشتقة)
 - ج - إنشاء المنحنى مع مراعاة التقعر ووضع المنحنى بالنسبة للمستقيمات المقاربة .

نهاية الدرس

ملخص حول دراسة وتمثيل الدوال العددية

I - الفروع اللانهائية :

(1) تعريف : لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم .
إذا كان D_f أو $f(D_f)$ تحتوي مجال من نوع $[a; +\infty[$ أو $]-\infty; a]$ فإننا نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعاً لا نهائياً .

(2) المستقيمات المقاربة :

a (المقارب الموازي لمحور الأرتاب :

تعريف :

إذا كان : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ فإننا نقول إن

المستقيم ذو المعادلة $x = a$ مقارباً لمنحنى الدالة f . (هذا المقارب مواز لمحور الأرتاب) .

b (المقارب الموازي لمحور الأفاسيل :

تعريف :

إذا كان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ فإننا نقول إن المستقيم ذو المعادلة $y = a$ مقارباً لمنحنى

الدالة . (هذا المستقيم مواز لمحور الأفاسيل) .

ملاحظة :

دراسة إشارة $f(x) - a$ تمكننا من معرفة وضع منحنى الدالة بالنسبة للمقارب .

إذا كان : $f(x) - a \geq 0$ فإن منحنى الدالة f يوجد فوق المقارب

إذا كان : $f(x) - a \leq 0$ فإن منحنى الدالة f يوجد تحت المقارب

c (المقارب المائل :

تعريف :

لتكن f دالة عددية بحيث : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

إذا كان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة :

$y = ax + b$ ($a \neq 0$) يسمى مقارباً لمنحنى الدالة f .

ملاحظة :

دراسة إشارة : $f(x) - (ax + b)$ تمكننا من معرفة وضع المنحنى بالنسبة للمقارب .

• إذا كان $f(x) - (ax + b) < 0$ فإن المنحنى يوجد تحت المقارب

• إذا كان $f(x) - (ax + b) > 0$ فإن المنحنى يوجد فوق المقارب .

ملاحظة :

إذا أمكننا كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = ax + b + h(x)$ بحيث $a \neq 0$ و h دالة بحيث $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 0$

فإن منحنى الدالة f يقبل المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارباً .

في كثير من الأحيان يصعب كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = ax + b + h(x)$ بحيث $a \neq 0$ و h دالة

بحيث $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 0$. الخاصية التالية تمكننا من تحديد معادلة المقارب المائل .

خاصية :

يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ($a \neq 0$) مقارباً مائلاً لمنحنى الدالة f إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \text{ . أو : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b \text{ .}$$

(3) الاتجاهات المقاربة :

• إذا كان : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ فإننا نقول : إن منحنى الدالة يقبل فرعاً شلجيميا

في اتجاه محور الأفاسيل . أو منحنى الدالة يقبل محور الأفاسيل اتجاهها مقارباً .

• إذا كان : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ فإننا نقول : إن منحنى الدالة يقبل فرعاً

شلجيميا في اتجاه محور الأرتاب . أو منحنى الدالة يقبل محور الأرتاب اتجاهها مقارباً .

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ وكان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$ فإننا نقول إن منحنى الدالة f يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه المستقيم ذو المعادلة $y = ax$ (أو المستقيم ذو المعادلة $y = ax$ اتجاه مقارب لمنحنى الدالة).

II - تقعر منحنى دالة - نقطة انعطاف لمنحنى :

تعريف :

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . و (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
1. نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماساته
 2. نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماساته
 3. نقول إن النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) إذا كان المنحنى (C_f) يخترق مماسه في النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$.

خصائص :

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I .
- 1) إذا كانت f'' موجبة على I فإن (C_f) يكون محدباً على I .
 - 2) إذا كانت f'' سالبة على I فإن (C_f) يكون مقعراً على I .
 - 3) إذا كانت f'' تنعدم في x_0 وتغير إشارتها فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$.

III - عناصر تماثل لمنحنى :

1) مركز تماثل لمنحنى :

- تعريف :** ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، و $A(a; b)$ نقطة من المستوى .
نقول إن النقطة $A(a; b)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطان :
- 1) $(2a - x) \in D_f$ لكل $x \in D_f$.
 - 2) $f(2a - x) = 2b - f(x)$ لكل $x \in D_f$.
- حالة خاصة :** إذا كانت f دالة فردية فإن النقطة O أصل المعلم هي مركز تماثل المنحنى .

2) محور تماثل لمنحنى :

- تعريف :** ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
نقول إن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تماثل المنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطان :
- 1) $(2a - x) \in D_f$ لكل $x \in D_f$.
 - 2) $f(2a - x) = f(x)$ لكل $x \in D_f$.
- حالة خاصة :** إذا كانت f دالة زوجية فإن منحنىها يقبل محور الأفاصيل محور تماثل .

IV - تصميم دراسة دالة :

لدراسة دالة عددية f غالباً ما تتبع الخطوات التالية :

1. تحديد مجموعة تعريف الدالة f .
2. دراسة زوجية ودورية الدالة f ثم تحديد مجموعة الدراسة D_E (إذا لم تكن الدالة زوجية ولا فردية ولا دورية فإن مجموعة الدراسة هي D_f مجموعة تعريف الدالة f).
3. حساب النهايات عند محددات مجموعة التعريف .
4. دراسة قابلية اشتقاق f على D_E .
5. دراسة تغيرات الدالة :
أ - حساب الدالة المشتقة ودراسة إشارتها
ب - استنتاج تغيرات الدالة f ثم إعطاء جدول التغيرات .
لتمثيل منحنى الدالة f غالباً ما تتبع المراحل التالية :
6. دراسة الفروع اللانهائية .
7. دراسة الوضع النسبي لمنحنى f بالنسبة لمقارباتها الأفقية والمائلة إن وجدت .
8. تحديد تقاطع منحنى الدالة f مع محوري المعلم (إذا أمكن) وإعطاء مماسات المنحنى في هذه النقاط
9. دراسة تقعر منحنى الدالة f وتحديد نقط الانعطاف إن وجدت ، وذلك بحساب الدالة المشتقة الثانية ودراسة إشارتها .
10. الرسم :

أ - إنشاء في غالب الأحيان معلم متعامد ممنظم مناسب .

ب - إنشاء المستقيمات المقاربة .

ج - إنشاء المماسات السابقة وكذا الموازية لمحور الأفاصيل (في النقط التي تنعدم فيها الدالة المشتقة)

د - إنشاء المنحنى مع مراعاة التقعر ووضع المنحنى بالنسبة للمستقيمات المقاربة .