دراسة وتمثيل الدوال العددية
تماريــن
قسم: $2^{ème}$T I

www.sbaysite.com الأستاذ محمد اليمني

التمرين 1 :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=|x|+\sqrt{x^2-9}$.

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f ، وبين أن f دالة زوجية .
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في $x_0=3$ وأول النتيجة هندسيا .
3. ادرس منحى تغير الدالة f على المجال $[3;+\infty[$ وأعط جدول تغيرات الدالة f على D_f .

أ ــ بين أن المستقيم ذو المعادلة $y=2x$ مقاربا للمنحنى (C_f) للدالة f واستنتج مقاربا آخر للمحنى (C_f).

ب ــ أنشئ المنحنى (C_f) .

4. ليكن g قصور الدالة f على المجال $[3;+\infty[$.

أ ــ بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} محددا مجموعة تعريفها J و $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

ب ــ أنشئ منحنى g^{-1} في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

التمرين 2 :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=5x-4-3\sqrt{x^2-1}$.

1. احسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في النقطة $x_0=1$.
3. أ ــ بين أنه لكل x من المجال $]1;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\dfrac{(4x-5)(4x+5)}{\sqrt{x^2-1}\left(5\sqrt{x^2-1}+3x\right)}$.

ب ــ أعط جدول تغيرات f .

4. ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ متعامد ممنظم (الوحدة : 2cm) .

أ ــ بين أن المستقيم $y=2x-4$: (D) مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب ــ أنشئ المنحنى (C_f)

5. ليكن g قصور الدالة f على المجال $\left[\dfrac{5}{4};+\infty\right[$.

أ ــ بين أن g تقابل من $\left[\dfrac{5}{4};+\infty\right[$ نحو مجال يجب تحديده .

ب ــ احسب : $\left(g^{-1}\right)'(6-3\sqrt{3})$.

التمرين 3 :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}-1}$ ؛ وليكن (C_f) منحناها في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ متعامد ممنظم .

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في النقطة $x_0=0$.
3. ادرس تغيرات الدالة f .
4. ليكن g قصور الدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

أ ــ بين أن g تقابل من $]1;+\infty[$ نحو مجال J المطلوب تحديده .

ب ــ حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

ج ــ احسب $\left(g^{-1}\right)'(x)$ لكل x من J .

د ــ أنشئ في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ المنحنيين (C_f) و $\left(C_{g^{-1}}\right)$.

التمرين 4

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;4]$ بما يلي : $f(x)=x\sqrt[3]{4-x}$.

1. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في $x_0 = 4$.
2. أ ــ بين أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة : $3-x$
ب ــ ادرس تغيرات الدالة f .
3. أنشئ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .
4. لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول U_0 حيث $0 \prec U_0 \prec 4$ وبالعلاقة : $U_{n+1} = f(U_n)$ لكل n من IN .

أ ــ لاحظ أن : $f(]0;4[) =]0;3]$ وبين أن : $0 \prec U_n \leq 3$ لكل n من IN* . ($U_0 \neq 3$)

ب ــ بين أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ تزايدية .

ج ــ بين أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها .

التمرين 5 :

I ــ نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{1-\sqrt{1+x^2}}$.

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f ، وادرس زوجيتها .
2. بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ وأن $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$.
3. احسب $f'(x)$ لكل x من D_f وبين أن $f'(x) \succ 0$ لكل x من D_f .

II ــ نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} g(x) = Arc\tan[f(x)] & x \succ 0 \\ g(0) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ وليكن (C_g) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ ــ ادرس اتصال g على اليمين في 0 .

ب ــ احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ واستنتج الفرع اللانهائي للمنحنى (C_g) .

2. احسب $g'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$ وأعط جدول تغيرات g . (نقبل أن g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 وأن $g_d'(0) = \dfrac{1}{2}$) .
3. أ ــ بين أن g تقابل من $[0;+\infty[$ نحو مجال J المطلوب تحديده .

ب ــ أنشئ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ (C_g) و $(C_{g^{-1}})$ منحنى الدالة g^{-1} .

التمرين 6 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{2-x} & ; \quad x \in [0;1] \\ f(x) = x - \sqrt{x^2 - x} & ; \quad x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\end{cases}$

1. ادرس اتصال f في 0 و 1 وحدد نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$.
2. ادرس قابلية اشتقاق f في كل من 0 و 1 وأول النتيجتين هندسيا .
3. احسب $f'(x)$ لكل $x \in IR^* - \{1\}$ وادرس إشارتها وأعط جدول تغيرات f .
4. ادرس الفروع اللانهائية وأنشئ (C_f) منحنى الدالة f في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ متعامد ممنظم ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$).

التمرين 7 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR ب : $\begin{cases} f(x) = x\sqrt[3]{x+1} & ; \quad x \geq -1 \\ f(x) = Arc\tan\left(\sqrt{x^2-1}\right) & ; \quad x \prec 1 \end{cases}$ وليكن (C_f) منحناها في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ متعامد ممنظم .

1. ادرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = -1$ وحدد نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$.
2. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).
3. ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين وعلى اليسار في $x_0 = -1$ وأول النتيجة هندسيا .
4. بين أن $f'(x) \succ 0$ لكل x من $\left]-\dfrac{3}{4};+\infty\right[$ و $f'(x) \prec 0$ لكل x من $]-\infty;-1[\cup \left]-1;-\dfrac{3}{4}\right[$ ثم ضع جدول تغيرات f

5. حدد معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة 0 ثم أنشئ (C_f). (نعطي : $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0.63$) .

6. ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty;-1[$.

أ ــ بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده . حدد $(g^{-1})(x)$ لكل x من J .

ب ــ احسب $g(-2)$ ثم استنتج $(g^{-1})'(\frac{\pi}{3})$.

ج ــ أنشئ $(C_{g^{-1}})$ منحنى الدالة g^{-1} في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7. لتكن $(U_n)_{n\in IN}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_0 = -\frac{1}{4}$ و $U_{n+1} = U_n\sqrt[3]{U_n + 1}$ لكل n من IN .

أ ــ بين بالترجع أن $-\frac{1}{4} \le U_n \le 0$ لكل n من IN ، وأن $(U_n)_{n\in IN}$ تزايدية .

ب ــ استنتج أن $(U_n)_{n\in IN}$ متقاربة واحسب نهايتها .

التمرين 8 :

نعتبر الدالة f المعرفة على IR^+ بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} - 1)$

1. ادرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 وأول النتيجة هندسيا .
2. احسب $f'(x)$ لكل x من IR^+ وأعط جدول تغيرات f .
3. أ ــ ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) .

ب ــ بين أن $A(1;0)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) ثم أعط معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة .

ج ــ أنشئ المنحنى (C_f) في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ متعامد ممنظم ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4cm$).

4. ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = \left[\frac{1}{8};+\infty\right[$.

بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده . حدد $(g^{-1})(x)$ لكل x من J ثم أنشئ في نفس المعلم $(C_{g^{-1}})$

التمرين 9 :

التمرين 10 :